

漳州市 2020 届高中毕业班第二次教学质量检测

文科数学参考答案及评分标准

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则.

2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应给分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题: 本大题考查基础知识和基本运算. 每小题 5 分, 满分 60 分.

1. D 2. D 3. B 4. A 5. B 6. C
7. B 8. C 9. D 10. A 11. C 12. A

二、填空题: 本大题考查基础知识和基本运算. 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 2 14. 3 15. 6 16. $\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) 因为 $f(x) = 2\sin^2 \frac{\pi}{8}x + 2\sin \frac{\pi}{8}x \cdot \cos \frac{\pi}{8}x - 1 = \sin \frac{\pi}{4}x - \cos \frac{\pi}{4}x$ 4 分

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ 5 分}$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ 6 分

(2) 由 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ 得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$,

解得 $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, 即 $x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$, 8 分

所以 $x_n = 4n - 3, n \in \mathbb{N}^*$, 9 分

所以 $a_n = \frac{1}{x_n \cdot x_{n+1}} = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$, 10 分

所以 $S_n = \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) \right]$
 $= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) < \frac{1}{4}$ 12 分

18. (1) 证明:因为 E, F 分别为 PB, AB 的中点,所以 $EF \parallel PA$, 1 分
- 因为 $EF \not\subset$ 平面 $PAD, PA \subset$ 平面 PAD ,所以 $EF \parallel$ 平面 PAD 2 分
- 因为 $AB \parallel CD, AB = 2CD$,所以 $AF \parallel CD, AF = CD$,
- 所以四边形 $ADCF$ 为平行四边形,所以 $CF \parallel AD$
- 因为 $CF \not\subset$ 平面 $PAD, AD \subset$ 平面 PAD ,所以 $CF \parallel$ 平面 PAD 5 分
- 因为 $EF \cap CF = F, EF, CF \subset$ 平面 EFC ,所以平面 $PAD \parallel$ 平面 EFC 6 分
- (2) 解:因为 $AB \perp AC, AB = AC = 2, F$ 为 AB 中点,

所以 $S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2}BF \cdot AC = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$, 7 分

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,所以 $V_{P-BCF} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCF} \cdot PA = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$, 8 分

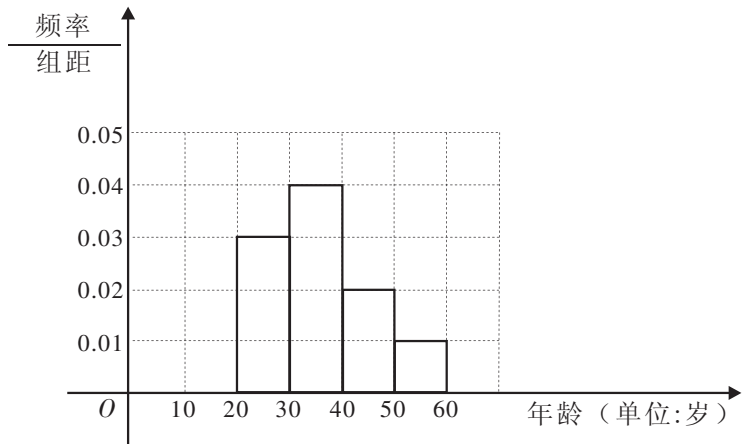
因为 $PF = CF = \sqrt{5}, PC = 2\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle PCF} = \frac{1}{2}PC \cdot \sqrt{PF^2 - (\frac{PC}{2})^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5 - 2} = \sqrt{6}$, 9 分

设 B 到平面 PCF 的距离为 h ,因为 $V_{B-PCF} = V_{P-BCF}$, 10 分

所以 $\frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times h = \frac{2}{3}$,所以 B 到平面 PCF 的距离 $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 12 分

19. 解:(1) 该工厂加工产品 A 的工人的年龄频率分布直方图如下



..... 4 分

- (2) 估计该工厂工人加工产品 A 的平均正品率为

$85\% \times 0.3 + 95\% \times 0.4 + 80\% \times 0.2 + 70\% \times 0.1$ 6 分

$= 25.5\% + 38\% + 16\% + 7\% = 86.5\%$ 8 分

(3) 因为 $86.5\% < 90\%$, $\frac{85\% \times 0.3 + 95\% \times 0.4 + 80\% \times 0.2}{0.3 + 0.4 + 0.2} \approx 88.3\% < 90\%$,

$$\text{由 } \frac{85\% \times 0.3 + 95\% \times 0.4 + 80\% \times 0.2 \times \frac{(x-40)}{10}}{0.3 + 0.4 + 0.2 \times \frac{(x-40)}{10}} = 90\%, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

得 $x = 42.5$,

所以为了使剩余工人加工产品 A 的平均正品率不低于 90%, 估计 x 最高可定为 42.5 岁. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 解:(1) 设 $P(x, y), x > 0, y > 0$,

又 $F(1, 0)$, 则 PF 中点坐标为 $(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2})$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

因为以 PF 为直径的圆与 y 轴相切,

所以 $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} |PF|$, 即 $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

整理, 得 C 的方程为 $y^2 = 4x (y > 0)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 $y^2 = 4x (y > 0)$, 得 $y = 2\sqrt{x}, y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设 $P(\frac{y_0^2}{4}, y_0) (y_0 > 0)$,

则 $k_1 = y' \big|_{x=\frac{y_0^2}{4}} = \frac{2}{y_0}, k_2 = \frac{y_0}{\frac{y_0^2}{4} - 1} = \frac{4y_0}{y_0^2 - 4}$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

由 $k_1 + k_2 = 3$, 即 $\frac{2}{y_0} + \frac{4y_0}{y_0^2 - 4} = 3$, 得 $3y_0^3 - 6y_0^2 - 12y_0 + 8 = 0 (*)$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

令 $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 12x + 8$,

由 $f'(x) = 9x^2 - 12x - 12 = 0$, 得 $x = -\frac{2}{3}$, 或 $x = 2$,

因为当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递减, 在 $(2, +\infty)$ 上递增, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

又 $f(0) = 8 > 0, f(2) = -16 < 0, f(4) = 56 > 0, f(x)$ 的图象连续不断

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有两个零点, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以方程 $(*)$ 有且只有两个不同的正根,

所以满足 $k_1 + k_2 = 3$ 的点 P 的个数为 2. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 解:(1) $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

因为当 $x \neq 0$ 时, $g'(x) = e^x + \frac{2}{x^2} > 0$, 3 分

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上是增函数. 5 分

(2) 因为 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

所以 x_1, x_2 是 $f'(x) = xe^x - tx - 2 = 0$, 即 $e^x - \frac{2}{x} - t = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ,

所以 x_1, x_2 是 $g(x)$ 的两个零点, 6 分

由(1)可知 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内分别至多有一个零点,

又 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 < 0$, 且 $g(x_1) = 0$, 即 $t = e^{x_1} - \frac{2}{x_1}$, 8 分

所以 $f(x_1) = (x_1 - 1)e^{x_1} - \frac{t}{2}x_1^2 - 2x_1$

$= (x_1 - 1)e^{x_1} - \frac{1}{2}(e^{x_1} - \frac{2}{x_1})x_1^2 - 2x_1 = (-\frac{x_1^2}{2} + x_1 - 1)e^{x_1} - x_1$, 9 分

令 $\varphi(x) = (-\frac{x^2}{2} + x - 1)e^x - x (x < 0)$, 则 $\varphi'(x) = -\frac{1}{2}x^2e^x - 1 < 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 10 分

因为 $f(x_1) + \frac{5}{2e} - 1 < 0$, 即 $f(x_1) < 1 - \frac{5}{2e}$, 即 $\varphi(x_1) < \varphi(-1)$,

所以 $-1 < x_1 < 0$, 11 分

所以 $g(-1) < g(x_1)$, 即 $\frac{1}{e} + 2 - t < 0$, 所以 $t > \frac{1}{e} + 2$ 12 分

22. 解:(1) 曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, ① 2 分

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$ ② 5 分

(2) ②代入①, 得 $t^2 + (32 - 4\sqrt{3})t + 76 = 0$, 6 分

所以 $\Delta = 16(8 - \sqrt{3})^2 - 4 \times 76 = 256 \times (3 - \sqrt{3}) > 0$,

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $\begin{cases} t_1 + t_2 = -(32 - 4\sqrt{3}), \\ t_1 t_2 = 76 > 0, \end{cases}$ 8 分

所以 $|PA| + |PB| = |t_1| + |t_2| = |t_1 + t_2| = 32 - 4\sqrt{3}$ 10 分

23. 解法一:(1) 因为 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \leq -2, \\ 3x, & -2 < x < 1, \\ -x+4, & x \geq 1. \end{cases}$ 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取最大值为 3, 即 $m = 3$ 5 分

(2) 由已知有 $2\sqrt{ab} = 4a^2 + b^2 \geq 4ab$,

因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $ab > 0$, 所以 $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$, 7 分

所以 $\frac{2}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8}{ab}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{ab}} \geq 8\sqrt{2} > 3$, 9 分

所以不存在实数 a, b , 使得 $\frac{2}{a} + \frac{4}{b} = 3$ 10 分

解法二:(1) 因为 $f(x) = |x+2| - 2|x-1| = |x+2| - |x-1| - |x-1|$
 $\leq |(x+2) - (x-1)| - 0 = 3$, 3 分

且 $f(1) = 3$, 4 分

所以 $f(x)$ 的最大值为 3, 即 $m = 3$ 5 分

(2) 由已知有 $2\sqrt{ab} = 4a^2 + b^2 \geq 4ab$,

因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $ab > 0$, 所以 $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$, ① 7 分

假设存在实数 a, b , 使得 $\frac{2}{a} + \frac{4}{b} = 3$,

则 $3 = \frac{2}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8}{ab}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$, 即 $\sqrt{ab} \geq \frac{4\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{2}$, ② 9 分

因为 ① 与 ② 矛盾, 所以假设不成立, 故不存在实数 a, b , 使得 $\frac{2}{a} + \frac{4}{b} = 3$.

..... 10 分