泉州市2020届普通高中毕业班第一次质量检查

数学（文科）参考答案与评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．将答案填在答题卡的相应位置。

13．2　　14．$[0,+\infty)$　　15．$2\sqrt{3}-2$，$\dfrac{14\pi}{3}$　　16．2.

四、解答题：共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.【命题意图】本题主要考查数列a_n与S_n的关系、等比数列的通项公式、前n项和公式等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想、分类与整合思想，考查发展数学抽象、数学运算及数学建模等核心素养．

解：（1）当$n=1$时，$a_1=S_1=1$，……1分

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$……2分

$=n^2-(n-1)^2$……3分

$=2n-1$，……4分

因为$a_1=1$适合上式，……5分

所以$a_n=2n-1\ (n\in \mathrm{N}^*)$．……6分

（2）由（1）得$b_1=1$，$b_3=9$，……7分

设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，则$b_3=b_1\cdot q^2=9$，解得$q=\pm 3$．……8分

当 $q=3$ 时，$T_n=\frac{1\cdot(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$， ………………………………………………………… 10 分

当 $q=-3$ 时，$T_n=\frac{1\cdot[1-(-3)^n]}{1-(-3)}=\frac{1}{4}-\frac{(-3)^n}{4}$． ………………………………………………… 12 分

17 评分补充说明：

（1）问：

①“因为 $a_1=1$ 适合上式”这句话没写不扣分；但如果没有求 $a_1=1$ 的，要扣 1 分；

②用不完全归纳法求出 $a_n=2n-1$ 的，得 3 分；

（2）问：

①如果只求出 $q=3$，后面只求出 $T_n=\frac{3^n-1}{2}$ 一种情况的，得 3 分；

②如果因为第 1 问出错，导致求的 b_n 也出错，但后续解法正确的话，根据实际情况，给不超过 3 分。

18.【命题意图】本题考查统计图表、频率与概率的关系、用样本估计总体、独立性检验等知识点．考查了学生对统计图表的识读与计算能力，考查了学生的数学建模、数据分析、数学抽象、数学运算等核心素养．

解：（1）由上表可知，

该唐诗属于“山水田园”类别的可能性最大，属于“其他”类别的可能性最小……………………… 2 分

属于“山水田园”类别的概率约为 $\frac{69}{271}$；属于“其他”类别的概率约为 $\frac{4}{271}$； …………………… 4 分

说明：可能性最大，最小，两个概率各 1 分；

概率算错，不影响可能性判断的得分；

（2）列联表如下：

	属于“爱情婚姻”类	不属于“爱情婚姻”类	共计
含“花”的篇数	60	100	160
不含“花”的篇数	40	300	340
共计	100	400	500

…………………………………………………………………………………………………… 8 分

说明：1.红色部分，一空 1 分；

2.“共计”部分算错不扣分；

计算得：$k_3=\dfrac{500\times 14000^2}{100\times 400\times 340\times 160}\approx 45.037$；　……………………………………………… 10 分

因为k_2，$k_3>3.841, k_1<3.841$，所以有超过95%的把握判断“花”字和“帘”字均与“爱情婚姻”有关系，故“花”和“帘”是“爱情婚姻”的关键字，而“山”不是；

又因为$k_2>k_3$，故选择“花”，“帘”作为“爱情婚姻”类别的关键字，且排序为“花”，“帘”．…12 分

说明：1.只答“花”和“帘”，未答”山“不是，不扣分；

2.k3 算错，2 分不给，但是后续对于“帘”是关键字和“山”不是关键字作出正确判断仍给 1 分；

19.【命题意图】本题考查空间面面垂直的的判定、线面角、二面角及点到面的距离等基础知识；考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化的思想；考查直观想象、逻辑推理和数学运算核心素养.

解法一：（1）依题意知，因为$CE\perp BE$，所以$PE\perp BE$．

又平面$PBE\perp$平面$ABCD$，平面$PBE\cap$平面$ABCD=BE$，$PE\subset$平面PBE，

所以$PE\perp$平面$ABCD$．……………………………………………………………………2 分

又$AB\subset$平面$ABCD$，

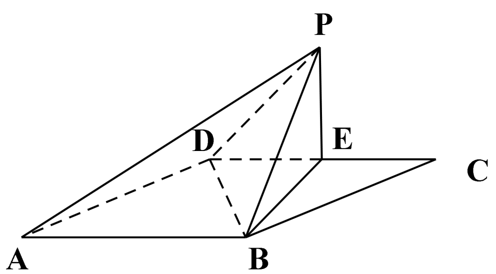
所以$PE\perp AB$．……………………………………………………………………………… 3 分

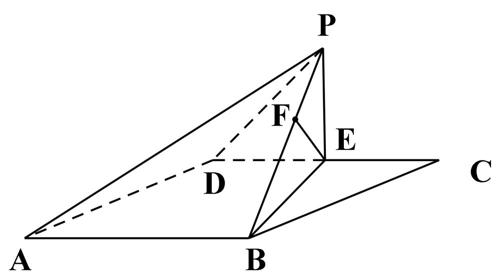
由已知，ΔBCD是等边三角形，且E为CD的中点，所以$BE\perp CD$．

因为$AB//CD$，所以$AB\perp BE$．……………………………………………………………4 分

又$PE\cap BE=E$，所以$AB\perp$平面PBE．………………………………………………5 分

又$AB\subset$平面PAB，所以平面$PAB\perp$平面PBE．……………………………………6 分





（2）在ΔABD中，$AB=AD=2$，　$\angle BAD=60^\circ$，所以　$S_{\Delta ABD}=\sqrt{3}$．………………………… 7 分

由（1）知，$PE\perp$平面ABD，且$PE=1$，

所以三棱锥$P-ABD$的体积$V=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．……………………………………………… 9 分

在$\mathrm{RT}\Delta PBE$中，$PE=1$，$BE=\sqrt{3}$，得$PB=2$．

由（1）知，$AB\perp$平面PBE，所以$AB\perp PB$．

所以 $S_{\Delta ABP}=2$．　……………………………………………………………………11 分

设点D到平面PAB的距离d．

则三棱锥$E-PAB$的体积$V'=\frac{1}{3}\times 2\times d=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得$d=\frac{\sqrt{3}}{2}$．　…………………………12 分

解法二：（1）同解法一；……………………………………………………………………………6 分

（2）因为$DE//AB$，$AB\subset$平面PAB，$DE\not\subset$平面PAB，

所以$DE//$平面PAB．

所以点E到平面PAB的距离等于点D到平面PAB的距离．…………………………8 分

过点E作PB的垂线，垂足F，即$EF\perp PB$．

由（1）知，平面$PAB\perp$平面PBE，平面$PAB\cap$平面$PBE=PB$，$EF\subset$平面PBE，

所以$EF\perp$平面PAB，即EF为点D到平面PAB的距离．…………………………10 分

由（1）知，$PE\perp BE$，

在$\mathrm{RT}\Delta PBE$中，$PE=1$，$BE=\sqrt{3}$，得$PB=2$．

又$PE\times BE=PB\times EF$，所以$EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

所以点D到平面PAB的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$．……………………………………………………………12

20．【命题意图】本小题主要考查抛物线的定义，直线与抛物线的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．

解：（1）设C的准线为l，过A作$AH\perp l$于H，则由抛物线定义，得$|AF|=|AH|$，

因为A到F的距离比到y轴的距离大 1，所以$\frac{p}{2}=1$，解得$p=2$，

所以C的方程为$y^2=4x$……………………………………………………………………………3 分

（2）由题意，设直线AF方程为$y=k(x-1)$，………………………………………………4 分

由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$消去$y$，得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$， ……………………………………5 分

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$， ……………………………………………6 分

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k=\frac{4}{k}$，

又因为M为AB的中点，点M的坐标为$(\frac{k^2+2}{k^2},\frac{2}{k})$， ……………………………………7 分

直线DM的方程为$y-\frac{2}{k}=-\frac{1}{k}(x-\frac{k^2+2}{k^2})$， ……………………………………………8 分

令$y=0$，得$x=3+\frac{2}{k^2}$，点D的坐标为$(3+\frac{2}{k^2},0)$， ………………………………………9 分

所以$|DM|=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{k}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{4}{k^2}}=\sqrt{6}$， ……………………………………………11 分

解得$k^2=2$，所以直线AF的斜率为$\pm\sqrt{2}$.………………………………………………………12 分

21.【命题意图】本小题主要考查导数的综合应用，利用导数研究函数的单调性、最值和零点等问题，考查抽象概括、推理论证、运算求解能力，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、数形结合思想、有限与无限思想以及特殊与一般思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模等核心素养，考查应用意识与创新意识.

解：（1）当$a=0$时，$f'(x)=e^x+\cos x-2$. ………………………………………………………1 分

记$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=e^x-\sin x$，

当$x\ge 0$时，$e^x\ge 1,-1\le\sin x\le 1$. ……………………………………………………………2 分

所以$g'(x)=e^x-\sin x\ge 0$，所以$g(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，所以$g(x)\ge g(0)=0$. ………3 分

因为$g(x)=f'(x)$，所以$f'(x)\ge 0$，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$为增函数. ……………………4 分

出现以下情况酌情给分：

①当$a=0$时，$f'(x)=e^x+\cos x-2$. ....1 分

没有过程，直接判断$f(x)$在$[0,+\infty)$为增函数...................2 分

②导函数求错，直接判断$f(x)$在$[0,+\infty)$为增函数...................1 分

③ $f'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-2$ ....1 分

分别作 $y_1=e^x与y_2=2-\cos x$ 的图象, 由图象得到 $y_1\geq y_2$ 恒成立, 但没有充足的理由

最后判断 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数..................3 分

（2）由题意，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-2ax-2$，记 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-2a$，

令 $h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$，

当 $x\geqslant 0$ 时， $\mathrm{e}^x\geqslant 1,\cos x\leqslant 1$，所以 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x\geqslant 0$， ·· 6 分

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数，即 $g'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-2a$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g'(x)\geqslant g'(0)=\mathrm{e}^0-\sin 0-2a=1-2a$ ． ·· 7 分

①当 $1-2a\geq 0$， $a\leq\dfrac{1}{2}$， $g'(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 为增函数，即 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)\geq 0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数,所以 $f(x)\geq f(0)=1$

所以 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 满足题意． ·· 9 分

②当 $a>\dfrac{1}{2}$， $g'(0)=1-2a<0$, 令 $u(x)=\mathrm{e}^x-x-1,x>0$，

因为 $x>0$，所以 $u'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，故 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故 $u(x)>u(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x>x+1$.···10 分

故 $g'(2a)=\mathrm{e}^{2a}-\sin 2a-2a>2a+1-\sin 2a-2a\geq 0$，

又 $g'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-2a$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

由零点存在性定理知，存在唯一实数 $m\in(0,+\infty)$， $g'(m)=0$，

当 $x\in(0,m)$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，即 $f'(x)$ 单调递减，

所以 $f'(x)<f'(0)=0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 为减函数，

所以 $f(x)<f(0)=0$,不合题意，应舍去．

综上所述， a 的取值范围是 $a\leq\dfrac{1}{2}$． ··· 12 分

出现以下情况酌情给分(扣除第一步 4 分):

分离参数法:当 $x=0$时,$1+a\cdot 0\geq 1$成立

当 $x>0, a\leq \dfrac{e^x+\sin x-2x-1}{x^2}$ 恒成立......................5 分

分析函数 $g(x)=\dfrac{e^x+\sin x-2x-1}{x^2}$ 单调性....................9 分

(对右边函数 $g(x)$ 求导,分析函数单调性,没有完整,酌情给 1 或 2 分)

求出 $g(x)$ 的最大值 $\dfrac{1}{2}$ ....11 分

所以 a 的取值范围是 $a\leq \dfrac{1}{2}$． ....12 分

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]

【命题意图】本小题主要考查圆的直角坐标方程与极坐标方程的互化，直线的参数方程及参数的几何意义、直线与圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力与运算求解能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．

解：（1）因为 $\begin{cases} x=t, \\ y=4-\sqrt{3}t \end{cases}$，所以 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y-4=0$，………………………………………… 1 分

又 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, x^2+y^2=\rho^2$，

l 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0$，……………………………………………… 3 分

C 的方程即为 $x^2+y^2-2y=0$，对应极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$． ……………………………… 5 分

（2）由己知设 $A(\rho_1,\alpha), B(\rho_2,\alpha)$，则 $\rho_1=\dfrac{4}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}, \rho_2=2\sin\alpha$， …………………… 6 分

所以，$\dfrac{|OB|}{|OA|}=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=\dfrac{1}{4}\times 2\sin\alpha(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{1}{4}[\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+1]$ ……………7 分

$=\dfrac{1}{4}[2\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{6})+1]$ ………………………………………………………… 8 分

又 $\dfrac{\pi}{6}\leq\alpha\leq\dfrac{5\pi}{12}$，$\dfrac{\pi}{6}\leq 2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{2\pi}{3}$，

当 $2\alpha-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，$\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 取得最小值 $\dfrac{1}{2}$；……………………………………………… 9 分

当 $2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{|OB|}{|OA|}$ 取得最大值 $\frac{3}{4}$．…………………………………………10 分

所以，$\frac{|OB|}{|OA|}$ 的取值范围为 $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$．…………………………………………………………10 分

23．［选修 4—5：不等式选讲］

【命题意图】本小题主要考查绝对值不等式的解法、不等式解集的概念、绝对值的意义等基础知识，考查抽象概括能力、运算求解能力，考查分类与整合的思想，化归与转化的思想，考查逻辑运算、数学运算、直观想象等核心素养，体现基础性与综合性．

对 1 个给 1 分，全对 2 分

解法一 ：（1） $f(x)=\begin{cases}-3x+\frac{1}{2},x\le-\frac{1}{2},\\ -x+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2},\\ 3x-\frac{1}{2},x>\frac{1}{2}.\end{cases}$ ………………………………………………………… 2 分

当 $x\le-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)\ge f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$，

当 $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$，$f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，

对 1 个给 1 分，全对 2 分

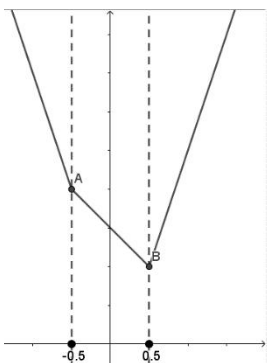
当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，…………………………………………………………4 分

所以 $m=f_{\min}(x)=1$ ……………………………………………………………………………5 分

对 1 个给 1 分，全对 2 分

补充：解法二 ：（1） $f(x)=\begin{cases}-3x+\frac{1}{2},x\le-\frac{1}{2},\\ -x+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2},\\ 3x-\frac{1}{2},x>\frac{1}{2}.\end{cases}$ …………………………………………………… 2 分

如图……………………………………………………………………………………4 分



当 $\mathbf{x}=\frac{1}{2}$ 时，$m=f_{\min}(x)=1$ ……………………………………………………………5 分

解法三 ：（1） $f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|\geqslant\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|$ ……………1 分

$=1+\left|x-\frac{1}{2}\right|\geqslant 1$ ………………………………………………………………………2 分

当且仅当 $\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0\\ x-\frac{1}{2}=0\end{cases}$ 即 $x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立. …………………………………4 分

(列式 1 分，x 值 1 分，或直接给出 x 值，2 分)

当 $\mathbf{x}=\frac{1}{2}$ 时，$m=f_{\min}(x)=1$ ……………………………………………………………5 分

解法一：（2）由题意可知，$ab+bc+ca=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$， ……………………………………………6 分

因为 $\boldsymbol{a}>0,\boldsymbol{b}>0,\boldsymbol{c}>0$， 所以要证明不等式 $ab+bc+ca\geq\frac{9}{a+b+c}$，

只需证明 $(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b+c)\geq 9$， ……………………………………………………7 分

两个基本不等式各 1 分

因为 $(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}3\sqrt[3]{abc}=9$ 成立， ……………………………………9 分

所以原不等式成立.……………………………………………………………………………………10 分

解法二：（2）因为 $a>0,b>0,c>0,$ 所以 $ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}>0$,……………………………6 分

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}>0$， ………………………………………………………………………7 分

又因为 $abc=1$,

所以 $(a+b+c)(ab+bc+ac)\geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9$， ……………………………………8 分

踩空回补

$(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\geqslant 9$ …………………………………………………………………9 分

所以 $ab+bc+ca\geq\frac{9}{a+b+c}$， 原不等式得证.……………………………………………… 10 分

补充：解法三：（2）由题意可知，$ab+bc+ca=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$， ……………………………………6 分

因为 $\boldsymbol{a}>0,\boldsymbol{b}>0,\boldsymbol{c}>0$， 所以要证明不等式 $ab+bc+ca\geq\frac{9}{a+b+c}$，

只需证明$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant 9$，…………………………………………………… 7 分

柯西 2 分

由柯西不等式得：$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=9$ 成立，……………………………………………………………………………………9 分

所以原不等式成立.……………………………………………………………………… 10 分