# 泉州市 2020 届普通高中毕业班第一次质量检查
# 理科数学试题答案及评分参考

**评分说明：**

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

**三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．将答案填在答题卡的相应位置。**

13．2　　14．$\dfrac{4}{3}$　　15．$(\dfrac{3}{4},0)$，$\dfrac{27}{4}$　　16．$(\dfrac{2\sqrt{7}}{7},2]$

**四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

**（一）必考题：共 60 分。**

17．本小题主要考查解三角形、三角恒等变换等基础知识，考查推理论证能力和运算求解能力等，考查数形结合思想和化归与转化思想等，体现综合性与应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算及数学建模等核心素养的关注．满分 12 分．

【解析】

思路探求 1：在 $Rt\triangle ABC$ 中，由已知条件求出相关的边与角，由倍角关系推导求出 $\triangle ADC$ 为等边三角形，再利用余弦定理即求出 $BD=\sqrt{7}$ 的长度．

（1）解法一：

在 $Rt\triangle ABC$ 中，由 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，$BC=\sqrt{3}$ 得

$AB=1$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$AC=2$ ……………………………………………………………………2 分

又 $\angle DAC=2\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\triangle ADC$ 为等边三角形，所以 $AD=2$ …………………………………………………………4 分

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得，$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos\angle BAD$，

即 $BD^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=7$，解得 $BD=\sqrt{7}$ ……………………………………6 分

思路探求 2：在 $Rt\triangle ABC$ 中，由已知条件求出相关的边与角，由倍角关系推导求出 $\triangle ADC$ 为等边三角形，再由角的关系推导出 $\triangle ABD$ 是直角三角形，利用勾股定理即求出 $BD=\sqrt{7}$ 的长度．

（1）解法二：在 $Rt\triangle ABC$ 中，由 $\angle ACB=\frac{\pi}{6}$，$BC=\sqrt{3}$ 得

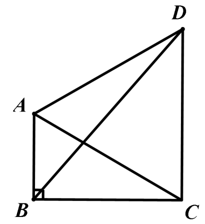
$AB=1$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$AC=2$ ........................................................................................2 分

又 $\angle DAC=2\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\triangle ADC$ 为等边三角形，所以 $CD=2$，$\angle ACD=\frac{\pi}{3}$，............................................4 分

因为 $\angle ACB=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$；

在 $\triangle ABD$ 中，由勾股定理得 $BD^2=CB^2+CD^2=(\sqrt{3})^2+2^2=7$，解得 $BD=\sqrt{7}$ .....6 分



思路探求 1：由题目已知条件 $\angle DAC=2\angle ACB$，可将所要的角转化到 $\triangle ACD$ 中，再将 $AC$ 用 $Rt\triangle ABC$ 中边角来表示，利用正弦定理及三角恒等变换求解即可得.

（2）解法一：

设 $\angle ACB=\theta$，$AB=x$，

则 $\angle DAC=2\theta$，$DC=\sqrt{3}x$ .......................................................................7 分

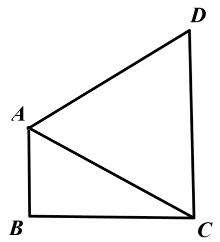
在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{x}{\sin\theta}$，......................................................8 分

在 $\triangle ACD$ 中，根据正弦定理得，$\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，

即 $\frac{\sqrt{3}x}{\sin 2\theta}=\frac{\frac{x}{\sin\theta}}{\sin\frac{\pi}{3}}$，......................................................................10 分

$\sqrt{3}x\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sin 2\theta\cdot\frac{x}{\sin\theta}$，$\sqrt{3}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{x}{\sin\theta}$ ..........................11 分

解得 $\cos\theta=\frac{3}{4}$，即 $\cos\angle ACB=\frac{3}{4}$ .........................................................................12 分



思路探求 2：由题目已知条件 $\angle DAC=2\angle ACB$，可将所要的角转化到 $\triangle ACD$ 中，利用正弦定理求

出 $AC$，再将 $AC$ 用 $Rt\triangle ABC$ 中边角来表示，最后再由等量代换求解即可得.

（2）解法二

设 $\angle ACB=\theta$， $AB=x$，

则 $\angle DAC=2\theta$， $DC=\sqrt{3}x$ ……………………………………………………………7 分

在 $\triangle ACD$ 中，根据正弦定理得，$\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，

即 $\dfrac{\sqrt{3}x}{\sin 2\theta}=\dfrac{AC}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$ 得 $AC=\dfrac{\frac{3}{2}x}{\sin 2\theta}=\dfrac{3x}{4\sin\theta\cos\theta}$ ………………………………9 分

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AC=\dfrac{AB}{\sin\theta}=\dfrac{x}{\sin\theta}$ ……………………………………………………10 分

所以 $\dfrac{3x}{4\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{x}{\sin\theta}$， ………………………………………………………………11 分

解得 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ 即 $\cos\angle ACB=\dfrac{3}{4}$ ……………………………………………………………12 分

思路探求 3：作辅助线，过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 $E$，构造两个直角三角形，将 $AC$ 用边角来表示，再将 $AC$ 用 $Rt\triangle ABC$ 中边角来表示，最后再由等量代换求解即可得.

（2）解法三

过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 $E$

设 $\angle ACB=\theta$， $AB=x$，

则 $\angle DAC=2\theta$， $DC=\sqrt{3}x$ ……………………………………………………………7 分

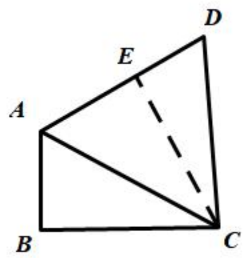
在 $Rt\triangle CDE$ 中， $CE=DC\sin\angle D=\sqrt{3}x\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}x$； …………………………………8 分

在 $Rt\triangle ACE$ 中， $AC=\dfrac{CE}{\sin\angle CAE}=\dfrac{3x}{2\sin 2\theta}=\dfrac{3x}{4\sin\theta\cos\theta}$ ……………………………9 分

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AC=\dfrac{AB}{\sin\theta}=\dfrac{x}{\sin\theta}$ …………………………………10 分

所以 $\dfrac{3x}{4\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{x}{\sin\theta}$， ………………………………………………11 分

解得 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ 即 $\cos\angle ACB=\dfrac{3}{4}$ ……………………………………………12 分




18．本小题考查线面垂直的判定与性质、二面角的求解及空间向量的坐标运算等基础知识，考查空间想象能力、推理论证及运算求解能力，考查化归与转化思想、数形结合思想等，体现基础性、综合性与应用性，导向对发展数学抽象、逻辑推理、直观想象等核心素养的关注．满分 12 分．

**解**：解法一：（1）依题意知，因为$CD \perp BE$，所以$PE \perp BE$，…………1 分

当平面$PBE \perp$平面$ABED$时,

平面$PBE \bigcap$平面$ABCD = BE$，$PE \subset$平面$PBE$，

所以$PE \perp$平面$ABCD$，…………2 分

因为$AB \subset$平面$ABCD$,所以$PE \perp AB$，…………3 分

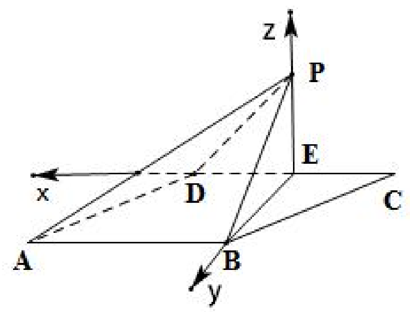
由已知，$\Delta BCD$是等边三角形，且$E$为$CD$的中点，

所以$BE \perp CD$，$AB // CD$，所以$AB \perp BE$，…………4 分

又$PE \bigcap BE = E$，所以$AB \perp$平面$PBE$，…………5 分

又$AB \subset$平面$PAB$，所以平面$PAB \perp$平面$PBE$．‥

（2）以$E$为原点，分别以$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{EB}$,$\overrightarrow{EP}$的方向为$x$轴，$y$轴，$z$轴的正方向，建立空间直角坐标系$E-xyz$,




则$E(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$A(2,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{EP} = (0,0,1)$，$\overrightarrow{EA} = (2,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BA} = (2,0,0)$，

$\overrightarrow{PA} = (2,\sqrt{3},-1)$，…………7 分

设平面$PAB$的一个法向量$\overrightarrow{\mathrm{m}} = (x_1, y_1, z_1)$，平面$PAE$的一个法向量$\overrightarrow{\mathrm{n}} = (x_2, y_2, z_2)$

由$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{m} = 0 \\ \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{m} = 0 \end{cases}$得$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_1 + \sqrt{3}y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$；令$y_1 = 1$，解得$z_1 = \sqrt{3}$，$x_1 = 0$，

所以$\overrightarrow{m} = (0,1,\sqrt{3})$，…………8 分

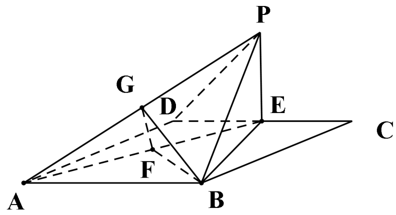
由$\begin{cases} \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \end{cases}$得$\begin{cases} z_2 = 0 \\ 2x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0 \end{cases}$；令$y_2 = -2$，解得$x_2 = \sqrt{3}$，$z_2 = 0$，

所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},-2,0)$， ……………………………………………………………………9 分

$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{0-2+0}{\sqrt{0^2+1^2+(\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2+0^2}}=\dfrac{-2}{2\times\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. …· 11 分

易得所求二面角为锐角，所以二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ .………………………………………12 分

解法二：（1）同解法一




（2）由(1)知 $PE\perp$ 平面 $ABCD$ ,且 $PE\subset$ 平面 $PAE$ ,

所以平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCD$ .

在 $\Delta ABE$ 中，作 $BF\perp AE$ ,垂足 $F$ .

因为平面 $PAE\bigcap$ 平面 $ABCD=AE$， $BF\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BF\perp$ 平面 $PAE$ . ………………………………………………7 分

所以 $BF\perp AP$ .

因为 $BP=BC=AB$，所以 $\Delta ABP$ 是等腰三角形.

取 $AP$ 的中点 $G$，并连接 $FG$ , $BG$，则 $BG\perp AP$ . ……………………………8 分

又 $BF\bigcap BG=B$ ,所以 $AP\perp$ 平面 $BFG$ .

所以 $\angle BGF$ 为二面角 $B-PA-E$ 的平面角. ……………………………………9 分

在 $RT\Delta ABE$ 中， $AB=2$ , $BE=\sqrt{3}$ , $AE=\sqrt{7}$ 所以 $BF=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ . ·10 分

同理，在 $RT\Delta ABP$ 中， $AB=BP=2$ , $AP=2\sqrt{2}$，所以 $BG=\sqrt{2}$ . … 11 分

在 $RT\Delta BFG$ 中， $GF=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ ,所以 $\cos\angle BGF=\dfrac{FG}{BG}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ .

所以二面角 $B-PA-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ . ………………………………………12 分

19．本小题主要考查椭圆的几何性质、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等，体现基础性、综合性与创新性，导向对发展逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模等核心素养的关注．满分 12 分．

解法一：（1）由已知得 $a^2-b^2=1$， ……………………………………………………………………1 分

因点 $P(1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆上，所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$ ……………………………………………2 分

所以 $a^2=4,b^2=3$ ……………………………………………………………………………3 分

所以椭圆 $C$ 的方程为： $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ………………………………………………4 分

（2）设直线$l$的方程为$y=\frac{1}{2}x+t$， ……………………………………………………………5 分

联立$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+t \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，消去$y$得$x^2+tx+t^2-3=0$， ……………………………………………7 分

在$\varDelta>0$时，$x_1+x_2=-t$，$x_1x_2=t^2-3$………………………………………………………………8 分

由$3x_1x_2+4y_1y_2=0$，即$3x_1x_2+4\left(\frac{1}{2}x_1+t\right)\left(\frac{1}{2}x_2+t\right)=0$，

所以$2x_1x_2+t\left(x_1+x_2\right)+2t^2=0$（*）. ……………………………………………………………9 分

将$x_1+x_2=-t$，$x_1x_2=t^2-3$代入（*）式，解得$t^2=2$， ……………………………………10 分

由于圆心$O$到直线$l$的距离为$d=\frac{2|t|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$， ……………………………………………………11 分

所以直线$l$被圆$O$截得的弦长为$l=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{4-\frac{8}{5}}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$.…………………………12 分

解法二：（1）$2a=\sqrt{(1+1)^2+(\frac{3}{2}-0)^2}+\sqrt{(1-1)^2+(\frac{3}{2}-0)^2}=4$,所以$a=2$……………………………2 分

所以$b^2=a^2-c^2=4-1=3$ ……………………………………………………………………………… 3 分

所以椭圆$C$的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$………………………………………………………………………4 分

（2）同解法一. ………………………………………………………………………………………………12 分

20．本小题主要考查等高条形图、独立性检验、分布列与期望等基础知识，考查数据处理能力、运算求解能力、应用意识等，考查统计与概率思想等，考查数学抽象、数学建模、数据分析等核心素养，体现基础性、综合性与应用性.

解：（1）根据所给等高条形图，得列联表： A 材料或 B 材料的数据对，给 1 分，全对 2 分

| | A 材料 | B 材料 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 成功 | 45 | 30 | 75 |
| 不成功 | 5 | 20 | 25 |
| 合计 | 50 | 50 | 100 |

……………………………………………………………………………………………2 分

列式 1 分，结果 1 分

$K^2$ 的观测值 $k=\dfrac{100\times(45\times20-5\times30)^2}{50\times50\times75\times25}$=12，……………………………………4 分

由于 $12>6.635$， 最后回答对，无大小比较，不扣分

故有 99%的把握认为试验成功与材料有关．……………………………………5 分

（2）生产 1 吨的石墨烯发热膜，所需的修复费用为 X 万元．…………………6 分

单位：元，0,1000,2000…也可

易知 X 可取 0，0.1，0.2，0.3，0.4，0.5．………………………………7 分

$P(X=0)=C_2^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{12}$，$P(X=0.1)=C_2^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{12}$，

概率值没化简不扣分
对 1-3 个，1 分
全对，2 分

$P(X=0.2)=C_2^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{12}$，$P(X=0.3)=C_2^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，

$P(X=0.4)=C_2^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{12}$，$P(X=0.5)=C_2^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，………………9 分

则 X 的分布列为： 分布列没写，不扣分

| X | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***P*** | $\dfrac{1}{6}$ | $\dfrac{1}{3}$ | $\dfrac{1}{6}$ | $\dfrac{1}{12}$ | $\dfrac{1}{6}$ | $\dfrac{1}{12}$ |

修复费用的期望：$E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+0.1\times\dfrac{1}{3}+0.2\times\dfrac{1}{6}+0.3\times\dfrac{1}{12}+0.4\times\dfrac{1}{6}+0.5\times\dfrac{1}{12}=0.2$．11 分

列式 1 分，结果 1 分

所以石墨烯发热膜的定价至少为 $0.2+1+1=2.2$ 万元/吨，才能实现预期的利润目标．……12 分

22000 元/吨，也可

21．本小题主要考查导数的综合应用，利用导数研究函数的单调性、最值和零点等问题，考查抽象概括、推理论证、运算求解能力，考查应用意识与创新意识，综合考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、数形结合思想、有限与无限思想以及特殊与一般思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模等核心素养．满分 12 分．

解：（1）当 $a=0$ 时，$f'(x)=e^x+\cos x-2$，……………………………………1 分

记 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-\sin x$，

当 $x>0$ 时，$e^x>1,-1\le\sin x\le1$，

所以 $g'(x)=e^x-\sin x>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，……………………………2 分

所以 $g(x)>g(0)=0$，

因为 $f'(x)=g(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数；……………………………………………3 分

当 $x<0$ 时，$e^x<1,-1\le\cos x\le 1$，所以 $f'(x)=e^x+\cos x-2<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数.……………………………………………………………………………4 分

综上所述，$f(x)$ 的递增区间为 $(0,+\infty)$，递减区间为 $(0,+\infty)$.………………………………………5 分

（2）由题意可得 $f'(x)=e^x+\cos x-2ax-2$，$f'(0)=0$.

记 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-\sin x-2a$.

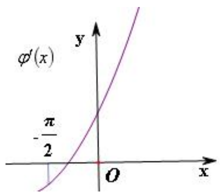
再令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^x-\cos x$.

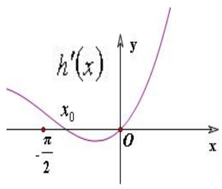
下面证明 $h'(x)=e^x-\cos x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 有零点：

令 $\varphi(x)=h'(x)$，则 $\varphi'(x)=e^x+\sin x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 是增函数，所以 $\varphi'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)<\varphi'(x)<\varphi'(0)$.

又 $\varphi'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)<0,,\varphi'(0)>0$，……………………………………………………………………6 分

所以存在 $x_1\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right),\varphi'(x_1)=0$，且当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},x_1\right),\varphi'(x)<0,x\in(x_1,0)$，$\varphi'(x)>0$，




所以 $\varphi(x)$，即 $h'(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},x_1\right)$ 为减函数，在 $(x_1,0)$ 为增函数，

又 $h'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)>0,h'(0)=0$，所以 $h'(x_1)<0$，

根据零点存在性定理，存在 $x_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},x_1\right),h'(x_0)=0$ ……………………………………………7 分

所以当 $x\in(x_0,0),h'(x)<0,$

又 $x>0,h'(x)=e^x-\cos x>0$，

所以 $h(x)$, 即 $g'(x)=e^x-\sin x-2a$ 在 $(x_0,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g'(x)\ge g'(0)=e^0-\sin 0-2a=1-2a$ .…………………………………………………8 分

①当 $1-2a\ge 0$, $a\le \frac{1}{2}$， $g'(x)\ge 0$ 恒成立，所以 $g(x)$, 即 $f'(x)$ 为增函数，

又 $f'(0)=0$ ，所以当 $x\in(x_0,0)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 为减函数， $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 为增函数，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，所以 $a\le\frac{1}{2}$ 满足题意.…………………………………10 分

②当 $a>\frac{1}{2}$， $g'(0)=1-2a<0$, 令 $u(x)=e^x-x-1, x>0$

因为 $x>0$ ，所以 $u'(x)=e^x-1>0$ ，

故 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，故 $u(x)>u(0)=0$ ，即有 $e^x>x+1$

故 $g'(2a)=e^{2a}-\sin 2a-2a>2a+1-\sin 2a-2a\ge 0$ ，

又 $g'(x)=e^x-\sin x-2a$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

由零点存在性定理知，存在唯一实数 $m\in(0,+\infty)$, $g'(m)=0$, 11 分

当 $x\in(0,m)$, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减，即 $f'(x)$ 递减，

所以 $f'(x)<f'(0)=0$ ，

此时 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 为减函数，所以 $f(x)<f(0)=0$ ,不合题意，应舍去.

综上所述， $a$ 的取值范围是 $a\le\frac{1}{2}$ .…………………………………………………12 分

**（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。**

22．选修 $4-4$：坐标系与参数方程

本小题主要考查圆的直角坐标方程与极坐标方程的互化，直线的参数方程及参数的几何意义、直线与圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力与运算求解能力，考查函数与方程思想、转化与化归思想、数形结合思想，体现基础性与综合性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注．满分 10 分．

解：（1）因为 $\begin{cases}x=t,\\ y=4-\sqrt{3}t\end{cases}$ ，所以 $l$ 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y-4=0$ ，…………………………1 分

又 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, x^2+y^2=\rho^2$ ，

$l$ 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0$ ，…………………………………… 3 分

C 的方程即为$x^2+y^2-2y=0$，对应极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$． ………………………… 5 分

（2）由已知设$A(\rho_1,\alpha),B(\rho_2,\alpha)$，则$\rho_1=\dfrac{4}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}$，$\rho_2=2\sin\alpha$， …………………… 6 分

所以，$\dfrac{|OB|}{|OA|}=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=\dfrac{1}{4}\times 2\sin\alpha(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{1}{4}[\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+1]$ ……………7 分

$=\dfrac{1}{4}[2\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{6})+1]$ ………………………………………………… 8 分

又$\dfrac{\pi}{6}\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}$，$\dfrac{\pi}{6}\le 2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{2\pi}{3}$，

当$2\alpha-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，$\dfrac{|OB|}{|OA|}$取得最小值$\dfrac{1}{2}$； ……………………………………… 9 分

当$2\alpha-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$时，$\dfrac{|OB|}{|OA|}$取得最大值$\dfrac{3}{4}$． ……………………………………10 分

所以，$\dfrac{|OB|}{|OA|}$的取值范围为$[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$． ……………………………………………………………10 分

23．选修 4－5：不等式选讲

本小题主要考查绝对值不等式的解法、不等式解集的概念、绝对值的意义等基础知识，考查抽象概括能力、运算求解能力，考查分类与整合的思想，转化与化归的思想，体现基础性与综合性，导向对发展逻辑运算、数学运算、直观想象等核心素养的关注．满分 10 分．

对 1 个给 1 分，全对 2 分

解法一 ：（1）$f(x)=\begin{cases}-3x+\dfrac{1}{2},x\le-\dfrac{1}{2},\\ -x+\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{1}{2},\\ 3x-\dfrac{1}{2},x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ ……………………………………………… 2 分

当$x\le-\dfrac{1}{2}$时，$f(x)\ge f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$，

当$-\dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{1}{2}$，$f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，

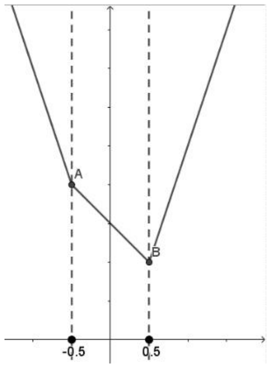
对 1 个给 1 分，全对 2 分

当$x>\dfrac{1}{2}$时，$f(x)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$， ……………………………………………4 分

所以$m=f_{\min}(x)=1$ ………………………………………………………………5 分

补充：解法二 ：（1） $f(x)=\begin{cases}-3x+\dfrac{1}{2}, x\le -\dfrac{1}{2},\\ -x+\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}<x\le \dfrac{1}{2},\\ 3x-\dfrac{1}{2}, x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ 对 1 个给 1 分，全对 2 分 ……………………………… 2 分

如图………………………………………………………………………………4 分




当 $\mathbf{x}=\dfrac{1}{2}$ 时， $m=f_{\min}(x)=1$ ……………………………………5 分

解法三 ：（1） $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{2}\right|+\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\geqslant\left|\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right|+\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$ ……………1 分

$=1+\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\geqslant 1$ ……………………………………………………2 分

当且仅当 $\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0\\ x-\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$ 即 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立. ………………………… 4 分

(列式 1 分，x 值 1 分，或直接给出 x 值，2 分)

当 $\mathbf{x}=\dfrac{1}{2}$ 时， $m=f_{\min}(x)=1$ ……………………………………5 分

解法一：（2）由题意可知， $ab+bc+ca=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ， ……………………………6 分

因为 $\boldsymbol{a}>0,\boldsymbol{b}>0,\boldsymbol{c}>0$ ， 所以要证明不等式 $ab+bc+ca\ge\dfrac{9}{a+b+c}$ ，

只需证明 $\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b+c)\ge 9$ ， …………………………………7 分

两个基本不等式各 1 分

因为 $\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}\,3\sqrt[3]{abc}=9$ 成立， …………………… 9 分

所以原不等式成立. …………………………………………………………10 分

解法二：（2）因为$a>0,b>0,c>0$，所以$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}>0$，…………………………………… 6 分

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}>0$，…………………………………………………………………………… 7 分

又因为$abc=1$，

所以$(a+b+c)(ab+bc+ac)\geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9$，……………………………………… 8 分

踩空回补

$(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\geqslant 9$ ………………………………………………………………………… 9 分

所以$ab+bc+ca\geq\dfrac{9}{a+b+c}$，原不等式得证.……………………………………………………… 10 分

补充：解法三：（2）由题意可知，$ab+bc+ca=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，……………………………………………6 分

因为$\boldsymbol{a}>0,\boldsymbol{b}>0,\boldsymbol{c}>0$，所以要证明不等式$ab+bc+ca\geq\dfrac{9}{a+b+c}$，

只需证明$\left(\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}+\dfrac{1}{\boldsymbol{b}}+\dfrac{1}{\boldsymbol{c}}\right)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\geqslant 9$，…………………………………………… 7 分

柯西 2 分

由柯西不等式得：$\left(\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}+\dfrac{1}{\boldsymbol{b}}+\dfrac{1}{\boldsymbol{c}}\right)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\geqslant\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\bullet\dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{a}}}+\sqrt{\boldsymbol{b}}\bullet\dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}+\sqrt{\boldsymbol{c}}\bullet\dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{c}}}\right)^2=9$ 成立，……………………………………………………………………………………………9 分

所以原不等式成立.………………………………………………………………………………… 10 分