

龙岩市 2020 年高中毕业班教学质量检查

数学（理科）试题

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

注意事项：

1. 考生将自己的姓名、准考证号及所有的答案均填写在答题卡上。
2. 答题要求见答题卡上的“填涂样例”和“注意事项”。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | y = \sqrt{2-x}\}$, $N = \{x | -2 < x < 3\}$, 则 $M \cap N =$
A. $\{x | -3 < x \leq 2\}$ B. $\{x | -3 < x < 2\}$ C. $\{x | -2 < x \leq 2\}$ D. $\{x | -2 < x < 2\}$
2. 若复数 z 满足 $z = (1-2i) \cdot i$, 则复平面内 \bar{z} 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知 $a = \log_3 8$, $b = 2^{1.1}$, $c = 0.8^{3.1}$, 则
A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$
4. $(x+1)(2x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中常数项为
A. -40 B. 40 C. -80 D. 80
5. 赵爽弦图（图 1）是取材于我国古代数学家赵爽的《勾股圆方图》，它是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形。图 2 是由弦图变化得到，它是由八个全等的直角三角形和中间的一个小正方形拼接而成。现随机向图 2 中大正方形的内部投掷一枚飞镖，若直角三角形的直角边长分别为 2 和 3，则飞镖投中小正方形（阴影）区域的概率为
A. $\frac{1}{25}$ B. $\frac{4}{25}$ C. $\frac{9}{25}$ D. $\frac{5}{36}$
6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x+\varphi)$ 满足 $f(\frac{\pi}{8}-x) = f(\frac{\pi}{8}+x)$, 则 $f(\frac{3\pi}{8}) =$
A. -2 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. 2
7. 函数 $f(x) = (3^x - 3^{-x})\log_3 x^2$ 的图象大致为

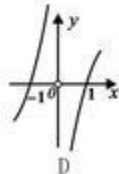
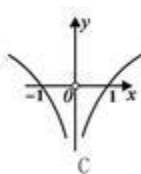
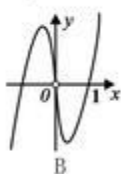
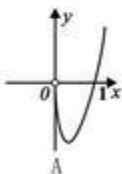


图1



图2

(第 5 题图)

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 A ，右顶点为 B ，若 $\triangle AFB$ 是直角三角形，则椭圆 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

9. 关于函数 $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) - x$ 有下述四个结论：

①函数 $f(x)$ 的图象把圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的面积两等分

② $f(x)$ 是周期为 π 的函数

③函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有 3 个零点

④函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减

其中所有正确结论的编号是

A. ①③④ B. ②④ C. ①④ D. ①③

10. 已知 O 是坐标原点， F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (3a = 4b > 0)$ 的左焦点，过 F 作斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 与双曲线渐近线相交于点 A ， A 在第一象限且 $|OA| = |OF|$ ，则 k 等于

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

11. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4, AC = 6$ ，其外接圆的圆心为 O ，则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()

A. 20 B. $\frac{29}{2}$ C. 10 D. $\frac{9}{2}$

12. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2，用一平面截此棱柱与侧棱 AA_1, BB_1, CC_1 分别交于 M, N, Q ，若 $\triangle MNQ$ 为直角三角形，则 $\triangle MNQ$ 面积的最小值为

A. $\sqrt{7}$ B. 3 C. $2\sqrt{7}$ D. 6

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y = (x^2 - 2)\ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为_____.

14. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2)}{4}$ ，则 $A =$ _____.

15. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1 = 1$ ， $2S_n + 1 = a_{n+1}$ ，则 $\frac{2S_{10} + 1}{a_{10}} =$ _____.

16. 波罗尼斯 (古希腊数学家，约公元前 262-190 年) 的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果，它将圆锥曲线的性质网罗殆尽几乎使后人没有插足的余地。他证明过这样一个命题：平面内与两定点距离的比为常数 $k (k > 0, \text{且 } k \neq 1)$ 的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆。现有 $\triangle ABC$ ， $AC = 4, \sin C = 2\sin A$ ，则当 $\triangle ABC$ 的面积最大时， AC 边上的高为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ，若 $a_6 = 11$ ，且 a_2, a_5, a_{14} 成等比数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

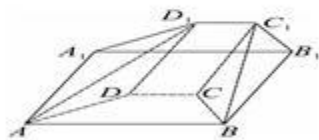
(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 4$ ， $BC = CD = 2$ ，顶点 D_1 在底面 $ABCD$ 内的射影恰为点 C 。

(1) 求证： $BC \perp$ 平面 ACD_1 ；

(2) 若直线 DD_1 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$ ，求平面 ABC_1D_1 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值。



(第 18 题图)

19. (本小题满分 12 分)

近一段时间来，由于受非洲猪瘟的影响，各地猪肉价格普遍上涨，生猪供不应求，各大养猪场正面临巨大挑战，目前各项针对性政策措施对于生猪整体产量恢复、激发养殖户积极性的作用正在逐步显现。

现有甲、乙两个规模一致的大型养猪场，均养有 1 万头猪，将其中重量 (kg) 在 $[1, 139]$ 内的猪分为三个成长阶段如下表。

猪生长的三个阶段

| 阶段 | 幼年期 | 成长期 | 成年期 |
|---------|-----------|-------------|--------------|
| 重量 (kg) | $[1, 24]$ | $[24, 116]$ | $[116, 139]$ |

根据以往经验，两个养猪场猪的体重 X 均近似服从正态分布 $X \sim N(70, 23^2)$ 。

由于我国有关部门加强对大型养猪场即将投放市场的成年期猪的监控力度，高度重视成年期猪的质量保证，为了养出健康的成年活猪，甲、乙两养猪场引入两种不同的防控及养殖模式。

已知甲、乙两个养猪场内一头成年期猪能通过质检合格的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ 。

(1) 试估算甲养猪场三个阶段猪的数量；

(2) 已知甲养猪场出售一头成年期的猪，若为健康合格的猪，则可盈利 600 元，若为不合格的猪，则亏损 100 元；乙养猪场出售一头成年期的猪，若为健康合格的猪，则可盈利 500 元，若为不合格的猪，则亏损 200 元。

(i) 记 Y 为甲、乙养猪场各出售一头成年期猪所得的总利润，求随机变量 Y 的分布列；

(ii) 假设两养猪场均能把成年期猪售完，求两养猪场的总利润期望值。

(参考数据：若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ，

$P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ， $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$)

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上一点 $P(2, m)$ ， F 为焦点， $\triangle PFO$ 面积为 1。

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 过点 P 引圆 $M: x^2 + (y-3)^2 = r^2$ ($0 < r < \sqrt{2}$) 的两条切线 PA 、 PB ，切线 PA 、 PB 与抛物线 C 的另一个交点分别为 A 、 B ，求直线 AB 斜率的取值范围。

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论函数的极值点个数;

(2) 若 $g(x) = f(x) - x$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 试判断 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 \cdot x_2$ 的大小关系并证明.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做第一个题目计分. 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho - 6 \cos \theta = 0$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平面直角坐标系, 直线 l 过点 $M(0, 2)$, 倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程与直线 l 的参数方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| + |x-2a|$.

(1) 若 $a=1$, 解不等式 $f(x) < 4$;

(2) 对任意的实数 m , 若总存在实数 x , 使得 $m^2 - 2m + 4 = f(x)$, 求实数 a 的取值范围.