

2020 年深圳市普通高中高三年级第二次线上统一测试

理科数学试题答案及评分参考

一、选择题

1. B 2. C 3. A 4. C 5. D 6. D
7. A 8. A 9. D 10. B 11. B 12. A

二、填空题：

13. $\frac{1}{4}$ 14. 32 15. $\frac{14}{27}$ 16. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 对边分别是 a 、 b 、 c ，已知 $\sin^2 B = \sin A \sin C$.(1) 求证： $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$ ；(2) 求 $2\sin^2 \frac{A+C}{2} + \sin B - 1$ 的取值范围.

解：(1) 由正弦定理可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because \sin^2 B = \sin A \sin C,$$

$$\therefore b^2 = ac, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \geq \frac{2ac - ac}{2ac} = \frac{1}{2},$$

而 $0 < B < \pi$

$$\therefore 0 < B \leq \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned}
 & (2) \quad 2\sin^2 \frac{A+C}{2} + \sin B - 1 \\
 & = -\cos(A+C) + \sin B \\
 & = \cos B + \sin B = \sqrt{2} \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right), \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

由 (1) 知 $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$,

$$\therefore \frac{\pi}{4} < B + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{12}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore 1 < \sqrt{2} \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\text{即 } 2\sin^2 \frac{A+C}{2} + \sin B - 1 \text{ 的取值范是 } (1, \sqrt{2}]. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. (本小题满分 12 分)

如图所示, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $SA = AB = BC = CD = 1$, $AD = 2$.

(1) 在棱 SD 上是否存在一点 P , 使得 $CP \parallel$ 平面 SAB ? 请证明你的结论;

(2) 求平面 SAB 和平面 SCD 所成锐二面角的余弦值.

证明: (1) 当点 P 为棱 SD 的中点时, $CP \parallel$ 平面 SAB . 证明如下:

取 SA 的中点 F , 连结 FP 、 FB 、 PC , 则

$$FP \parallel AD \text{ 且 } FP = \frac{1}{2} AD, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because AD \parallel BC, \quad BC = \frac{1}{2} AD = 1,$$

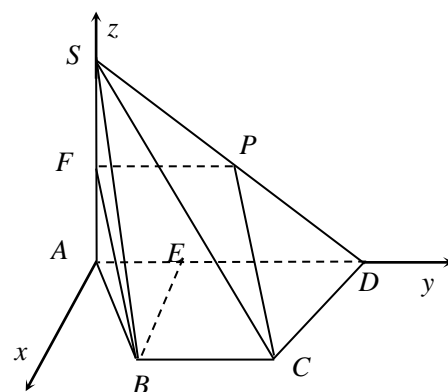
$$\therefore FP \parallel BC \text{ 且 } FP = BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } FBCP \text{ 为平行四边形}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore CP \parallel BF,$$

$$\because CP \not\subset \text{平面 } SAB, \quad BF \subset \text{平面 } SAB,$$

$$\therefore CP \parallel \text{平面 } SAB. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



(2) 在平面 $ABCD$ 内过点 A 作直线 AD 垂线 Ax ,

$$\because SA \perp \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore SA \perp AD, \quad SA \perp Ax,$$

\therefore 直线 AS 、 Ax 和 AD 两两垂直,

以点 A 为原点, 分别以直线 Ax 、 AD 和 AS 为 x 、 y 和 z 建立如图所示的直角坐标系,

过点 B 作 $BE \perp AD$ 交直线 AD 于 E ,

$\because AD \parallel BC, AB = BC = CD = 1, AD = 2,$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}, BE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

从而可得 $A(0,0,0), B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0), D(0,2,0), S(0,0,1)$, 则

$$\overrightarrow{AS} = (0,0,1), \overrightarrow{AB} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{SD} = (0,2,-1), \overrightarrow{DC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 SAB 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 SCD 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AS} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{SD} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} z_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2y_2 - z_2 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 = 0, \end{cases}$$

取 $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$, 可得

$$\vec{n}_1 = (\sqrt{3}, -3, 0), \vec{n}_2 = (\sqrt{3}, 3, 6), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{(\sqrt{3}, -3, 0) \cdot (\sqrt{3}, 3, 6)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + 6^2}} = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{平面 } SAB \text{ 和平面 } SCD \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{1}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, A, B 分别是椭圆 C 长轴的左、右端点, M 为椭圆上的动点.

- (1) 求 $\angle AMB$ 的最大值, 并证明你的结论;
- (2) 设直线 AM 的斜率为 k , 且 $k \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, 求直线 BM 的斜率的取值范围.

解: (1) 根据椭圆的对称性, 不妨设 $M(x_0, y_0) (-2\sqrt{3} < x_0 < 2\sqrt{3}, 0 < y_0 \leq 2)$.

过点 M 作 $MH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 则 $H(x_0, 0) (0 < y_0 \leq 2)$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

于是, 有

$$\tan \angle AMH = \frac{|AH|}{|MH|} = \frac{x_0 + 2\sqrt{3}}{y_0}, \tan \angle BMH = \frac{|BH|}{|MH|} = \frac{2\sqrt{3} - x_0}{y_0},$$

$$\therefore \tan \angle AMB = \tan(\angle AMH + \angle BMH) = \frac{\tan \angle AMH + \tan \angle BMH}{1 - \tan \angle AMH \tan \angle BMH} = \frac{4\sqrt{3}y_0}{x_0^2 + y_0^2 - 12}, \dots 3 \text{ 分}$$

\because 点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上,

$$\therefore \frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{4} = 1, \therefore x_0^2 = 12 - 3y_0^2,$$

$$\therefore \tan \angle AMB = -\frac{2\sqrt{3}}{y_0}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

而 $0 < y_0 \leq 2$,

$$\therefore \tan \angle AMB = -\frac{2\sqrt{3}}{y_0} \leq -\sqrt{3},$$

\because 点 $0 < \angle AMB < \pi$,

$\therefore \angle AMB$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$, 此时 $y_0 = 2$, 即点 M 为椭圆 C 的上顶点.

根据椭圆的对称性, 当点 M 为椭圆 C 的短轴的顶点时, $\angle AMB$ 取最大值, 其最大值为 $\frac{2\pi}{3}$.
 $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) 设直线 BM 的斜率为 k' , $M(x_0, y_0)$, 则

$$k = \frac{y_0}{x_0 + 2\sqrt{3}}, \quad k' = \frac{y_0}{x_0 - 2\sqrt{3}},$$

$$\therefore k \cdot k' = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 12},$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{4} = 1, \therefore x_0^2 = 12 - 3y_0^2,$$

$$\therefore k \cdot k' = -\frac{1}{3}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore k \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore \frac{2}{3} < k' < 1,$$

故直线 BM 的斜率的取值范围为 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.
 $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = e^x$ (e 为自然对数的底数).

(1) 讨论函数 $\varphi(x) = f(x) - \frac{x+a}{x}$ 在定义域内极值点的个数;

(2) 设直线 l 为函数 $f(x)$ 的图象上一点 $A(x_0, y_0)$ 处的切线, 证明: 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的 x_0 , 使得直线 l 与曲线 $y = g(x)$ 相切.

解: (1) $\varphi(x) = f(x) - \frac{x+a}{x} = \ln(x+1) - \frac{x+a}{x} \quad (x > -1 \text{ 且 } x \neq 0),$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 + ax + a}{(x+1)x^2},$$

令 $h(x) = x^2 + ax + a$, $\Delta = a^2 - 4a$,1 分

①当 $\Delta = a^2 - 4a \leq 0$ 时, 即当 $0 \leq a \leq 4$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, 此时, $\varphi(x)$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 单调递增, 无极值点;2 分

②当 $\Delta = a^2 - 4a > 0$ 时, 即当 $a < 0$ 或 $a > 4$ 时,

函数 $h(x) = x^2 + ax + a$ 有两个零点,

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2},$$

(i) 当 $a < 0$ 时,

因为 $-1 - x_1 = \frac{-2 + a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - 4a} - \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2} < 0$, 所以 $x_2 > 0 > x_1 > -1$,3 分

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(-1, x_1)$ 单调递增, 在 $(x_1, 0)$ 和 $(0, x_2)$ 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增,

此时函数 $\varphi(x)$ 有两个极值点;4 分

(ii) 当 $a > 4$ 时,

因为 $-1 - x_2 = \frac{-2 + a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - 4a + 4} - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} > 0$,

所以 $x_1 < x_2 < -1$, 此时 $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 单调递增, 无极值点.5 分

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 无极值点, 当 $a < 0$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 有两个极值点.6 分

(2) 因为 $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,

所以函数 $f(x)$ 的图象上一点 $A(x_0, y_0)$ 处的切线 l 的方程可表示为

$$y - y_0 = \frac{1}{x_0 + 1}(x - x_0), \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设直线 l 与曲线 $y = g(x)$ 相切于点 $B(x_1, e^{x_1})$,

因为 $g'(x) = e^x$,

$$\text{所以} \begin{cases} e^{x_1} = \frac{1}{x_0 + 1}, \\ y_0 = \ln(x_0 + 1), \\ e^{x_1} - y_0 = \frac{1}{x_0 + 1}(x_1 - x_0), \end{cases}$$

消去 x_1 并整理, 得

$$\ln(x_0 + 1) - \frac{x_0 + 1}{x_0} = 0, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

由 (1) 可知, 当 $a = 1$ 时, 函数 $\varphi(x) = \ln(x + 1) - \frac{x + 1}{x} (x > -1)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{又 } \varphi(e - 1) = -\frac{1}{e - 1} < 0, \quad \varphi(e^2 - 1) = \frac{e^2 - 2}{e^2 - 1} > 0,$$

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(e - 1, e^2 - 1)$ 上有唯一的零点, 又因为 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

所以方程 $\ln(x_0 + 1) - \frac{x_0 + 1}{x_0} = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的根,

故在区间 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的 x_0 , 使得直线 l 与曲线 $y = g(x)$ 相切. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. (本小题满分 12 分)

2020 年初, 新冠肺炎疫情袭击全国, 某省由于人员流动性较大, 成为湖北省外疫情最严重的省份之一, 截至 2 月 29 日, 该省已累计确诊 1349 例患者 (无境外输入病例).

(1) 为了解新冠肺炎的相关特征, 研究人员从该省随机抽取 100 名确诊患者, 统计他们的年龄数据, 得下面的频数分布表:

年龄	[10,20]	(20,30]	(30,40]	(40,50]	(50,60]	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
人数	2	6	12	18	22	22	12	4	2

由频数分布表可以大致认为, 该省新冠肺炎患者的年龄 Z 服从正态分布 $N(\mu, 15.2^2)$, 其中 μ 近似为这 100 名患者年龄的样本平均数 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表). 请估计该省新冠肺炎患者年龄在 70 岁以上 (≥ 70) 的患者比例;

(2) 截至 2 月 29 日, 该省新冠肺炎的密切接触者(均已接受检测)中确诊患者约占 10%, 以这些密切接触者确诊的频率代替 1 名密切接触者确诊发生的概率, 每名密切接触者是否确诊相互独立. 现有密切接触者 20 人, 为检测出所有患者, 设计了如下方案: 将这 20 名密切接触者随机地按 n ($1 < n < 20$ 且 n 是 20 的约数) 个人一组平均分组, 并将同组的 n 个人每人抽取的一半血液混合在一起化验, 若发现新冠病毒, 则对该组的 n 个人抽取的另一半血液逐一化验, 记 n 个人中患者的人数为 X_n , 以化验次数的期望值为决策依据, 试确定使得 20 人的化验总次数最少的 n 的值.

参考数据: 若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$,

$P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9973$,

$0.9^4 \approx 0.66$, $0.9^5 \approx 0.59$, $0.9^{10} \approx 0.35$.

解: (1)

$$\mu = \frac{2 \times 15 + 6 \times 25 + 12 \times 35 + 18 \times 45 + 22 \times 55 + 22 \times 65 + 12 \times 75 + 4 \times 85 + 2 \times 95}{100} = 54.8, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以 $P(54.8 - 15.2 < Z < 54.8 + 15.2) = P(39.6 < Z < 70) = 0.6826$,

$$P(Z \geq 70) = \frac{1 - P(39.6 < Z < 70)}{2} = \frac{1 - 0.6826}{2} = 0.1587 = 15.87\%,$$

则可估计该省确诊新冠肺炎患者年龄在 70 岁以上的患者比例为 15.87%. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)解法一: 根据题意, 每名密切接触者确诊为新冠肺炎的概率均为 $\frac{1}{10}$, n 的可能取值为 2, 4,

5, 10,

当 $n \in \{2, 4, 5, 10\}$ 时, $X_n \sim B(n, \frac{1}{10})$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

对于某组 n 个人, 化验次数 Y 的可能取值为 1, $n+1$,

$$P(Y=1) = \left(\frac{9}{10}\right)^n, \quad P(Y=n+1) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

$$E(Y) = 1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n + (n+1) \cdot \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right] = n+1 - n\left(\frac{9}{10}\right)^n, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{则 20 人的化验总次数为 } f(n) = \frac{20}{n} \left[n+1 - n\left(\frac{9}{10}\right)^n \right] = 20 \left[1 + \frac{1}{n} - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right],$$

经计算 $f(2)=13.8$, $f(4) \approx 11.8$, $f(5) \approx 12.2$, $f(10) \approx 15$.

所以, 当 $n=4$ 时符合题意, 即按 4 人一组检测, 可使化验总次数最少. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

解法二：根据题意，每名密切接触者确诊的概率均为 $\frac{1}{10}$ ， n 的可能取值为 2, 4, 5, 10,

当 $n \in \{2, 4, 5, 10\}$ 时， $X_n \sim B(n, \frac{1}{10})$,7 分

设以 n 个人为一组时，组内每人所需的化验次数为 Y ，则 Y 的可能取值为 $\frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n}$,

$$P(Y = \frac{1}{n}) = (\frac{9}{10})^n, \quad P(Y = 1 + \frac{1}{n}) = 1 - (\frac{9}{10})^n,$$

则 $E(Y) = \frac{1}{n} \cdot (\frac{9}{10})^n + (1 + \frac{1}{n}) \cdot [1 - (\frac{9}{10})^n] = 1 + \frac{1}{n} - (\frac{9}{10})^n$,9 分

则 20 人所需的化验次数为 $f(n) = 20 \left[1 + \frac{1}{n} - (\frac{9}{10})^n \right]$,

$$f(2) = 13.8, \quad f(4) \approx 11.8, \quad f(5) \approx 12.2, \quad f(10) \approx 15.$$

所以，符合题意的 $n = 4$ ，即按 4 人一组检测，可使化验总次数最少。12 分

22. (本小题满分 10 分) 选修 4 - 4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 曲线 $C_1: \begin{cases} x = 2 \cos \beta, \\ y = 4 + 2 \sin \beta \end{cases}$

(β 为参数), l_1 与 C_1 相切于点 A ，以坐标原点为极点， x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1 的极坐标方程及点 A 的极坐标;

(2) 已知直线 $l_2: \theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 与圆 $C_2: \rho^2 - 4\sqrt{3}\rho \cos \theta + 2 = 0$ 交于 B, C 两点，记 $\triangle AOB$

的面积为 S_1 ， $\triangle COC_2$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}$ 的值.

解：(1) (**解法一**) 由题意可知， C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ ，

将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入得 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - 8\rho \sin \theta + 12 = 0$,2 分

又 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$),

得 l_1 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbf{R}$),3 分

将 $\theta = \alpha$ 代入得 $\rho^2 - 8\rho \sin \alpha + 12 = 0$ ，则 $\Delta = (8 \sin \alpha)^2 - 4 \times 12 = 0$ ，又 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，

解得 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，此时 $\rho = 2\sqrt{3}$ ，所以点 A 的极坐标为 $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$ ，5 分

(解法二) 由题意可知， C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ ，

将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入，得 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - 8\rho \sin \theta + 12 = 0$ ，2 分

因为 l_1 与 C_1 相切于点 A ，所以在 $\text{Rt} \triangle OC_1A$ 中，有 $|OA| = \sqrt{OC_1^2 - C_1A^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\sin \angle AOC_1 = \frac{|C_1A|}{|OC_1|} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\angle AOC_1 = \frac{\pi}{6}$ ，4 分

由极坐标的几何意义，可得 $A(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$ 。5 分

(2) 由 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\sqrt{3}\rho \cos \theta + 2 = 0$ ，可得 C_2 的直角坐标方程为

$(x-2\sqrt{3})^2 + y^2 = 5$ ，所以圆心 $C_2(2\sqrt{3}, 0)$ ，6 分

设 $B(\rho_1, \frac{\pi}{3})$ ， $C(\rho_2, \frac{\pi}{3})$ 将 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho^2 - 4\sqrt{3}\rho \cos \theta + 2 = 0$ ，

得 $\rho^2 - 6\rho + 2 = 0$ ，所以 $\rho_1 + \rho_2 = 6$ ， $\rho_1\rho_2 = 2$ ，7 分

又因为 $S_1 = \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \rho_A \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_1$ ， $S_2 = \frac{1}{2}|OC_2| \cdot \rho_2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_2$ ，8 分

所以 $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{6^2 - 2 \times 2}{2} = 16$ 。10 分

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $f(x) = |x - 2a|$ 。

(1) 当 $a = 1$ 时，解不等式 $f(x) > 2x + 1$ ；

(2) 若存在实数 $a \in (1, +\infty)$ ，使得关于 x 的不等式 $f(x) + \left| x + \frac{2}{a-1} \right| < m$ 有实数解，求实数 m 的

取值范围。

解: (1) 当 $a = 1$ 时，即解不等式 $|x - 2| > 2x + 1$ ，

(法一) ①当 $x \geq 2$ 时，原不等式等价于 $x - 2 > 2x + 1$ ，所以 $x < -3$ ，

所以不等式 $f(x) > 2x + 1$ 的解集为空集，2 分

②当 $x < 2$ 时，原不等式等价于 $2 - x > 2x + 1$ ，解得 $x < \frac{1}{3}$ ，4 分

综上所述，不等式 $f(x) > 2x + 1$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{3})$5 分

(法二) ①当 $x < -\frac{1}{2}$ 时，不等式 $|x - 2| > 2x + 1$ 显然成立；2 分

②当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时，原不等式等价于 $(x - 2)^2 > (2x + 1)^2$,

即 $3x^2 + 8x - 3 < 0$ ，解得 $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{3}$,4 分

综上所述，不等式 $f(x) > 2x + 1$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{3})$5 分

(2) 因为 $f(x) + \left|x + \frac{2}{a-1}\right| = |x - 2a| + \left|x + \frac{2}{a-1}\right| \geq \left|2a + \frac{2}{a-1}\right|$ ，显然等号可取，6 分

又 $a \in (1, +\infty)$ ，故原问题等价于关于 a 的不等式 $2a + \frac{2}{a-1} < m$ 在 $(1, +\infty)$ 上有解，...8 分

又因为 $2a + \frac{2}{a-1} = 2(a-1) + \frac{2}{a-1} + 2 \geq 2\sqrt{2(a-1) \cdot \frac{2}{a-1}} + 2 = 6$,

当且仅当 $a = 2$ 时取等号，所以 $m > 6$ ，即 $m \in (6, +\infty)$10 分