

## 2020 年深圳市普通高中高三年级第二次线上统一测试

## 文科数学参考答案与评分标准

## 一、选择题

1. C            2. C            3. D            4. C            5. B            6. D  
7. B            8. A            9. B            10. C           11. D           12. B

## 二、填空题:

13.  $\frac{1}{4}$             14. 32            15.  $-\frac{1}{9}$             16.  $\frac{8}{3}\pi^3$ .

17. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_{n+1}a_n + a_{n+1} = 2a_n$  ( $a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$ ).

(1) 证明: 数列  $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$  是等比数列;

(2) 数列  $\{\frac{n}{a_n}\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

解: (1)  $\because a_{n+1}a_n + a_{n+1} = 2a_n$  ( $a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$ ),

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n},$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_n} - 1 \right), \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } a_1 = \frac{2}{3}, \therefore \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{2},$$

$\therefore$  数列  $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$  是以  $\frac{1}{2}$  为首项,  $\frac{1}{2}$  为公比的等比数列.  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } \frac{1}{a_n} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n},$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n} + 1,$$

$$\therefore \frac{n}{a_n} = \frac{n}{2^n} + n. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{设 } T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}, \quad \text{①}$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}, \quad \text{②}$$

由①-②得

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\therefore T_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}. \text{ 又 } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore \text{数列 } \left\{ \frac{n}{a_n} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = 2 - \frac{2+n}{2^n} + \frac{n(n+1)}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

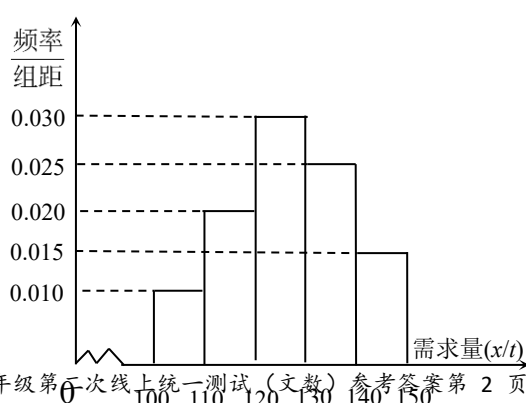
18. (本小题满分 12 分)

随着经济模式的改变, 微商和电商已成为当今城乡一种新型的购销平台. 已知经销某种商品的电商在任何一个销售季度内, 每售出 1 吨该商品可获利润 0.5 万元, 未售出的商品, 每 1 吨亏损 0.3 万元. 根据往年的销售经验, 得到一个销售季度内市场需求量的频率分布直方图如图所示. 已知电商为下一个销售季度筹备了 130 吨该商品. 现以  $x$  (单位: 吨,  $100 \leq x \leq 150$ ) 表示下一个销售季度的市场需求量,  $T$  (单位: 万元) 表示该电商下一个销售季度内经销该商品获得的利润.

(1) 将  $T$  表示为  $x$  的函数, 求出该函数表达式;

(2) 根据直方图估计利润  $T$  不少于 57 万元的概率;

(3) 根据频率分布直方图, 估计一个销售季度内市场需求量  $x$  的平均数与中位数的大小 (保留到小数点后一位).



解: (1) 当  $x \in [100, 130)$  时,  $T = 0.5x - 0.3(130 - x) = 0.8x - 39$ ; .....1 分

当  $x \in [130, 150]$  时,  $T = 0.5 \times 130 = 65$ , .....2 分

所以,

$$T = \begin{cases} 0.8x - 39, & 100 \leq x < 130, \\ 65, & 130 \leq x \leq 150. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 根据频率分布直方图及 (1) 知,

当  $x \in [100, 130)$  时, 由  $T = 0.8x - 39 \geq 57$ , 得  $120 \leq x < 130$ , .....4 分

当  $x \in [130, 150]$  时, 由  $T = 65 \geq 57$ , .....5 分

所以, 利润  $T$  不少于 57 万元当且仅当  $120 \leq x \leq 150$ , 于是由频率分布直方图可知市场需求量  $x \in [120, 150]$  的频率为  $(0.030 + 0.025 + 0.015) \times 10 = 0.7$ ,

所以下一个销售季度内的利润  $T$  不少于 57 万元的概率的估计值为 0.7, .....7 分

(3) 估计一个销售季度内市场需求量  $x$  的平均数为

$$\bar{x} = 105 \times 0.1 + 115 \times 0.2 + 125 \times 0.3 + 135 \times 0.25 + 145 \times 0.15 = 126.5 \quad (\text{吨}) \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

由频率分布直方图易知, 由于  $x \in [100, 120)$  时, 对应的频率为

$$(0.01 + 0.02) \times 10 = 0.3 < 0.5,$$

而  $x \in [100, 130)$  时, 对应的频率为 .....10 分

$$(0.01 + 0.02 + 0.3) \times 10 = 0.6 > 0.5,$$

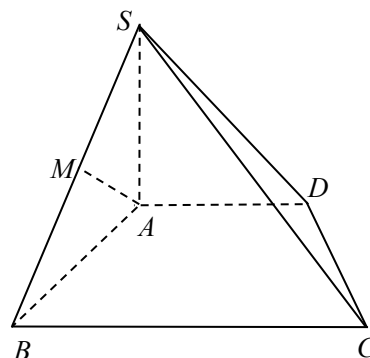
因此一个销售季度内市场需求量  $x$  的中位数应属于区间  $[120, 130)$ , 于是估计中位数应为  $120 + (0.5 - 0.1 - 0.2) \div 0.03 \approx 126.7$  (吨) .....12 分

19. (本小题满分 12 分)

如图所示, 四棱锥  $S-ABCD$  中,  $SA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ,  $AB = AD = SA = 1$ ,  $BC = 2$ ,  $M$  为  $SB$  的中点.

(1) 求证:  $AM \parallel$  平面  $SCD$ ;

(2) 求点  $B$  到平面  $SCD$  的距离.



证明：（1）取  $SC$  的中点  $N$ ，连结  $MN$  和  $DN$ ，

$\because M$  为  $SB$  的中点，

$\therefore MN \parallel BC$  且  $MN = \frac{1}{2}BC$ ，.....2 分

$\because \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ， $AD = 1$ ， $BC = 2$ ，

$\therefore AD \parallel BC$  且  $AD = \frac{1}{2}BC$ ，.....4 分

$\therefore AD \parallel MN$  且  $AD = MN$ ，

$\therefore$  四边形  $AMND$  为平行四边形，

$\therefore AM \parallel DN$ ，.....5 分

$\because AM \not\subset$  平面  $SCD$ ， $DN \subset$  平面  $SCD$ ，

$\therefore AM \parallel$  平面  $SCD$ 。.....6 分

（2） $\because AB = SA = 1$ ， $M$  为  $SB$  的中点，

$\therefore AM \perp SB$ ，.....8 分

$\because SA \perp$  平面  $ABCD$ ，

$\therefore SA \perp BC$ ，

$\because \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore BC \perp AB$ ，

$\therefore BC \perp$  平面  $SAB$ ，

$\therefore BC \perp AM$ ，

$\therefore AM \perp$  平面  $SBC$ ，

由（1）可知  $AM \parallel DN$ ，

$\therefore DN \perp$  平面  $SBC$ ，

$\because DN \subset$  平面  $SCD$ ，

$\therefore$  平面  $SCD \perp$  平面  $SBC$ ，.....10 分

作  $BE \perp SC$  交  $SC$  于  $E$ ，则

$BE \perp$  平面  $SCD$ ，

在直角三角形  $SBC$  中，有

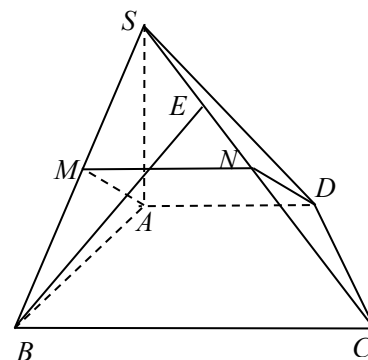
$$\frac{1}{2}SB \cdot BC = \frac{1}{2}SC \cdot BE，$$

$$\therefore BE = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}，$$

即点  $B$  到平面  $SCD$  距离为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .....12 分

（三棱锥体积法参照给分）

20. (本小题满分 12 分)



已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ,  $F_1$ 、 $F_2$  分别是椭圆  $C$  的左、右焦点,  $M$  为椭圆上的动点.

(1) 求  $\angle F_1 M F_2$  的最大值, 并证明你的结论;

(2) 若  $A$ 、 $B$  分别是椭圆  $C$  长轴的左、右端点, 设直线  $AM$  的斜率为  $k$ , 且  $k \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ , 求直线  $BM$  的斜率的取值范围.

解: (1) 由椭圆的定义可知  $|MF_1| + |MF_2| = 4$ ,

在  $\triangle F_1 M F_2$  中, 由余弦定理, 可得

$$\begin{aligned} \cos \angle F_1 M F_2 &= \frac{|MF_1|^2 + |MF_2|^2 - |F_1 F_2|^2}{2|MF_1| \cdot |MF_2|} \\ &= \frac{(|MF_1| + |MF_2|)^2 - |F_1 F_2|^2 - 2|MF_1| \cdot |MF_2|}{2|MF_1| \cdot |MF_2|} \\ &= \frac{2 - |MF_1| \cdot |MF_2|}{|MF_1| \cdot |MF_2|} = \frac{2}{|MF_1| \cdot |MF_2|} - 1 \geq \frac{2}{\left(\frac{|MF_1| + |MF_2|}{2}\right)^2} - 1 = -\frac{1}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\because 0 < \angle F_1 M F_2 < \pi,$$

$$\therefore \angle F_1 M F_2 \text{ 的最大值为 } \frac{2\pi}{3}, \text{ 此时 } |MF_1| = |MF_2|,$$

即点  $M$  为椭圆  $C$  的上顶点时,  $\angle F_1 M F_2$  取最大值, 其最大值为  $\frac{2\pi}{3}$  ..... 5 分

根据椭圆的对称性, 当点  $M$  为椭圆  $C$  的短轴的顶点时,  $\angle A M B$  取最大值, 其最大值为  $\frac{2\pi}{3}$ .  
..... 6 分

(2) 设直线  $BM$  的斜率为  $k'$ ,  $M(x_0, y_0)$ , 则

$$k = \frac{y_0}{x_0 + 2}, \quad k' = \frac{y_0}{x_0 - 2},$$

$$\therefore k \cdot k' = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \therefore x_0^2 = 4 - 4y_0^2,$$

$$\therefore k \cdot k' = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore k \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{2} < k' < \frac{3}{4},$$

故直线  $BM$  的斜率的取值范围为  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  .....12 分

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)e^x$  ( $e$  为自然对数的底数), 其中  $a > 0$ .

(1) 在区间  $(-\infty, -\frac{a}{2}]$  上,  $f(x)$  是否存在最小值? 若存在, 求出最小值; 若不存在, 请说明理由.

(2) 若函数  $f(x)$  的两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 证明:

$$\frac{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)}{x_2 - x_1} > 1 + \frac{2}{a+2}.$$

解: (1) 由条件可函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上有意义,

$$f'(x) = \frac{x^2 + ax - a}{x^2} e^x,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2},$$

因为  $a > 0$ , 所以  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ .

所以当  $x \in (-\infty, x_1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x \in (x_1, 0)$  上  $f'(x) < 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, x_1)$  上是增函数, 在  $(x_1, 0)$  是减函数. ....3 分

由  $f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)e^x = \frac{x+a}{x}e^x$  可知,

当  $x = -a$  时,  $f(x) = 0$ , 当  $x < -a$  时,  $f(x) > 0$ , 当  $-a < x < 0$  时,  $f(x) < 0$ ,

$$\text{因为 } -a - x_1 = -a - \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2} > 0,$$

所以  $x_1 < -a < 0$ ,

又函数在  $(x_1, 0)$  上是减函数, 且  $x_1 < -a < -\frac{a}{2} < 0$ ,

所以函数在区间  $(-\infty, -\frac{a}{2}]$  上的有最小值, 其最小值为  $f(-\frac{a}{2}) = -e^{-\frac{a}{2}}$ . .....6 分

(2) 由 (1) 可知, 当  $a > 0$  时函数  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ ,

且  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 + ax - a = 0$  的两根,

所以  $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = -a$ , 且  $x_1 < x_2 < 1$ ,

$$f(x_1) = (1 + \frac{a}{x_1})e^{x_1} = (1 - x_2)e^{x_1}, \quad f(x_2) = (1 - x_1)e^{x_2},$$

所以  $\ln f(x_2) = \ln(1 - x_1)e^{x_2} = \ln(1 - x_1) + x_2$ ,

$\ln f(x_1) = \ln(1 - x_2)e^{x_1} = \ln(1 - x_2) + x_1$ ,

$$\text{所以 } \frac{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\ln(1 - x_1) + x_2 - \ln(1 - x_2) - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln(1 - x_1) - \ln(1 - x_2)}{(1 - x_1) - (1 - x_2)} + 1,$$

$$\text{又 } 1 + \frac{2}{a+2} = 1 + \frac{2}{-(x_2 + x_1) + 2} = 1 + \frac{2}{(1 - x_1) + (1 - x_2)}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

由 (1) 可知  $1 - x_1 > 1 - x_2 > 0$ ,

设  $m = 1 - x_1$ ,  $n = 1 - x_2$ , 则  $m > n > 0$ ,

故要证  $\frac{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)}{x_2 - x_1} > 1 + \frac{2}{a+2}$  成立, 只要证  $\frac{\ln m - \ln n}{m - n} > \frac{2}{m + n}$  成立,

下面证明不等式  $\frac{\ln m - \ln n}{m - n} > \frac{2}{m + n}$  成立,

构造函数  $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, (t \geq 1)$

则  $h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$ , 所以  $h(t)$  在  $t \in (1, +\infty)$  上单调递增,  $h(t) > h(1) = 0$ ,

即  $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$  成立,

令  $t = \frac{m}{n}$ , 即得不等式  $\frac{\ln m - \ln n}{m - n} > \frac{2}{m + n}$ ,

从而  $\frac{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)}{x_2 - x_1} > 1 + \frac{2}{a+2}$  成立. ....12 分

22. (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), 曲线  $C_1:$

$\begin{cases} x = 2 \cos \beta, \\ y = 4 + 2 \sin \beta \end{cases}$  ( $\beta$  为参数),  $l_1$  与  $C_1$  相切于点  $A$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴的非负半轴为

极轴建立极坐标系.

(1) 求  $C_1$  的极坐标方程及点  $A$  的极坐标;

(2) 已知直线  $l_2: \theta = \frac{\pi}{6} (\rho \in \mathbf{R})$  与圆  $C_2: \rho^2 - 4\sqrt{3}\rho \cos \theta + 2 = 0$  交于  $B, C$  两点, 记

$\triangle AOB$  的面积为  $S_1$ ,  $\triangle COC_2$  的面积为  $S_2$ , 求  $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}$  的值.

解: (1) (法一) 由题意可知,  $C_1$  的直角坐标方程为  $x^2 + (y-4)^2 = 4$ ,

将  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  代入得  $C_1$  的极坐标方程为

$$\rho^2 - 8\rho \sin \theta + 12 = 0, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又  $l_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ),

得  $l_1$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha (\rho \in \mathbf{R})$ , ....3 分

将  $\theta = \alpha$  代入得  $\rho^2 - 8\rho \sin \alpha + 12 = 0$ , 则  $\Delta = (8 \sin \alpha)^2 - 4 \times 12 = 0$ , 又  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,

解得  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , 此时  $\rho = 2\sqrt{3}$ , 所以点  $A$  的极坐标为  $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$ , ....5 分

(法二) 由题意可知,  $C_1$  的直角坐标方程为  $x^2 + (y-4)^2 = 4$ ,

将  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  代入, 得  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 8\rho \sin \theta + 12 = 0$ , ....2 分

因为  $l_1$  与  $C_1$  相切于点  $A$ , 所以在  $\text{Rt} \triangle OC_1A$  中, 有  $|OA| = \sqrt{OC_1^2 - C_1A^2} = 2\sqrt{3}$ ,



$$\sin \angle AOC_1 = \frac{|C_1A|}{|OC_1|} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \angle AOC_1 = \frac{\pi}{6}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由极坐标的几何意义, 可得  $A(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 4\sqrt{3}\rho \cos \theta + 2 = 0$ , 可得  $C_2$  的直角坐标方程为

$$(x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 = 5, \text{ 所以圆心 } C_2(2\sqrt{3}, 0), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设  $B(\rho_1, \frac{\pi}{3})$ ,  $C(\rho_2, \frac{\pi}{3})$  将  $\theta = \frac{\pi}{6}$  代入  $\rho^2 - 4\sqrt{3}\rho \cos \theta + 2 = 0$ ,

$$\text{得 } \rho^2 - 6\rho + 2 = 0, \text{ 所以 } \rho_1 + \rho_2 = 6, \rho_1\rho_2 = 2, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } S_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \cdot \rho_A \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho_1, S_2 = \frac{1}{2} |OC_2| \cdot \rho_2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho_2 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{6^2 - 2 \times 2}{2} = 16. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知  $f(x) = |x - 2a|$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 解不等式  $f(x) > 2x + 1$ ;

(2) 若存在实数  $a \in (1, +\infty)$ , 使得关于  $x$  的不等式  $f(x) + \left| x + \frac{2}{a-1} \right| < m$  有实数解, 求实

数  $m$  的取值范围.

解: (1) 当  $a = 1$  时, 即解不等式  $|x - 2| > 2x + 1$ ,

(法一) ①当  $x \geq 2$  时, 原不等式等价于  $x - 2 > 2x + 1$ , 所以  $x < -3$ ,

所以不等式  $f(x) > 2x + 1$  的解集为空集,  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

②当  $x < 2$  时, 原不等式等价于  $2 - x > 2x + 1$ , 解得  $x < \frac{1}{3}$ ,  $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

综上所述, 不等式  $f(x) > 2x + 1$  的解集为  $(-\infty, \frac{1}{3})$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(法二) ①当  $x < -\frac{1}{2}$  时, 不等式  $|x - 2| > 2x + 1$  显然成立;  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

②当  $x \geq -\frac{1}{2}$  时, 原不等式等价于  $(x - 2)^2 > (2x + 1)^2$ ,

即  $3x^2 + 8x - 3 < 0$ ，解得  $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{3}$ ， .....4 分

综上所述，不等式  $f(x) > 2x + 1$  的解集为  $(-\infty, \frac{1}{3})$  .....5 分

(2) 因为  $f(x) + \left|x + \frac{2}{a-1}\right| = |x - 2a| + \left|x + \frac{2}{a-1}\right| \geq \left|2a + \frac{2}{a-1}\right|$ ，显然等号可取。...6 分

又  $a \in (1, +\infty)$ ，

故原问题等价于关于  $a$  的不等式  $2a + \frac{2}{a-1} < m$  在  $(1, +\infty)$  上有解， .....8 分

又因为  $2a + \frac{2}{a-1} = 2(a-1) + \frac{2}{a-1} + 2 \geq 2\sqrt{2(a-1) \cdot \frac{2}{a-1}} + 2 = 6$ ，

当且仅当  $a = 2$  时取等号，所以  $m > 6$ ，即  $m \in (6, +\infty)$ 。 .....10 分