

漳州市 2020 届高中毕业班第二次教学质量检测

理科数学试题

本试卷共 6 页。满分 150 分。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{x+1}\}$ ， $B = \{y \mid y = \lg x\}$ ，则

$$A \cup B =$$

A. $[-1, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. \mathbf{R}

2. 已知复数 z 的共轭复数为 \bar{z} ，且满足 $2z + \bar{z} = 3 + 2i$ ，则 $|z| =$

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 5

3. 执行如图所示的程序框图，若输入的 $n = 3$ ，则输出的 $S =$

A. 1 B. 5 C. 14 D. 30

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_3 = \frac{3}{4}$ ， $S_3 = \frac{21}{4}$ ，

则 $\{a_n\}$ 的公比为

A. $-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}$

C. -3 或 2

D. 3 或 -2

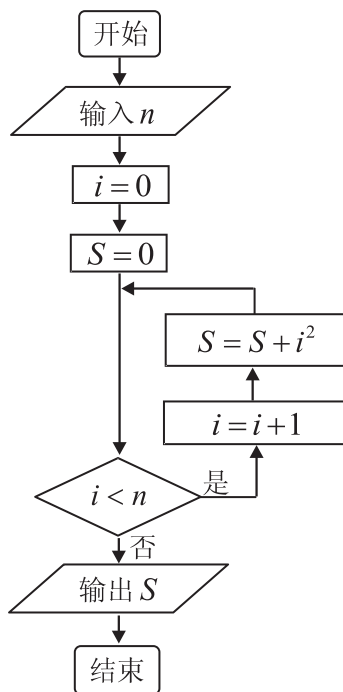
5. $(1-2x)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为

A. 6

B. 24

C. 32

D. 48

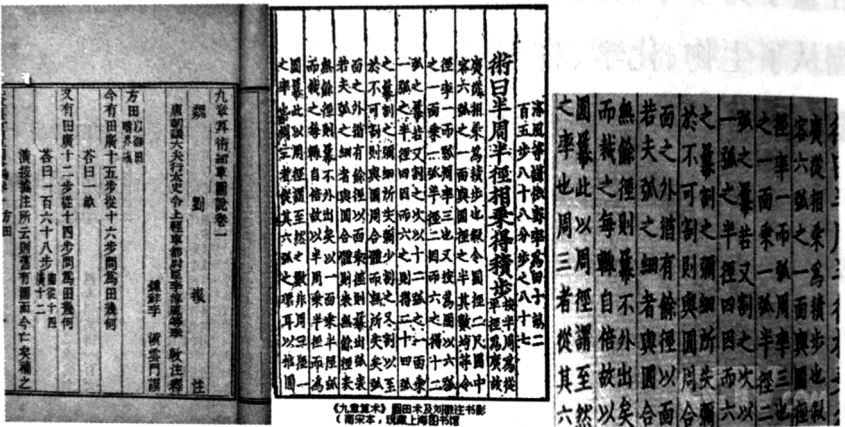


6. 我国古代著名数学家刘徽的杰作《九章算术注》是中国最宝贵的数学遗产之一，书中记载了他计算圆周率所用的方法．先作一个半径为1的单位圆，然后做其内接正六边形，在此基础上做出内接正 $6 \times 2^n (n = 1, 2, \dots)$ 边形，这样正多边形的边逐渐逼近圆周，从而得到圆周率，这种方法称为“刘徽割圆术”．现设单位圆 O 的内接正 n 边形的一边为 AC ，点 B 为劣弧 \widehat{AC} 的中点，则 BC 是内接正 $2n$ 边形的一边，现记 $AC = S_n$ ， $AB = S_{2n}$ ，则

- A. $S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$

B. $S_{2n} = \sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$
- C. $S_{2n} = 2\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$

D. $S_{2n} = \sqrt{4 - 3\sqrt{4 - S_n^2}}$



(注：刘徽的《九章算术注》节选)

7. 已知正三棱柱的底面边长为 $2\sqrt{3}$ ，侧棱长为 2， A, B 分别为该正三棱柱内切球和外接球上的动点，则 A, B 两点间的距离最大值为

- A. $\sqrt{5} - 2$

B. $\sqrt{5} - 1$
- C. $\sqrt{5} + 1$

D. $\sqrt{5} + 2$

8. 若 $a = 4^{\frac{1}{4}}$ ， $b = \log_5 12$ ， $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ ，则

- A. $b < a < c$

B. $a < b < c$
- C. $a < c < b$

D. $c < a < b$

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线与 C 的左、右支分别交于 P, Q 两点，若 $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{F_1P}$ ， $\overrightarrow{F_1Q} \cdot \overrightarrow{F_2Q} = 0$ ，则 C 的渐近线方程为

- A. $y = \pm \frac{1}{2}x$

B. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$
- C. $y = \pm \sqrt{2}x$

D. $y = \pm 2x$

10. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $(2b - c)\cos A = a\cos C$ ， $b = 2\sqrt{3}$ ，若边 BC 的中线等于 3，则 $\triangle ABC$ 的面积为

- A. $9\sqrt{3}$

B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
- C. $3\sqrt{3}$

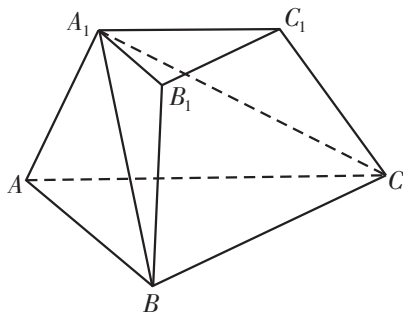
D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

18. (12 分)

如图，三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 = AB = CC_1$ ， $\angle AA_1C = \angle ABC = 90^\circ$ 。

(1) 证明： $AC \perp A_1B$ ；

(2) 若 $AB = 2$ ， $A_1B = \sqrt{6}$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，求二面角 $A - CC_1 - B$ 的余弦值。



19. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中， F_1, F_2 是 x 轴上关于原点 O 对称的两定点，点 H 满足 $|HF_1| + |HF_2| = 2|F_1F_2| = 4$ ，点 H 的轨迹为曲线 E 。

(1) 求 E 的方程；

(2) 过 F_2 的直线与 E 交于点 P, Q ，线段 PQ 的中点为 G ， PQ 的中垂线分别与 x 轴、 y 轴交于点 M, N ，问 $\triangle OMN \cong \triangle GMF_2$ 是否成立？若成立，求出直线 PQ 的方程；若不成立，请说明理由。

20. (12 分)

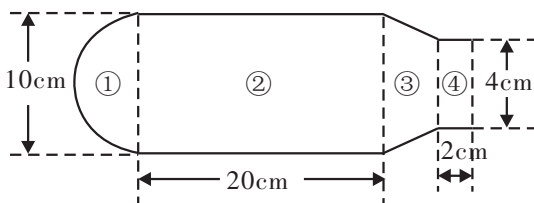
某同学使用某品牌暖水瓶，其内胆规格如图所示。若水瓶内胆壁厚不计，且内胆如图分为 ①②③④ 四个部分，它们分别为一个半球、一个大圆柱、一个圆台和一个小圆柱体。

若其中圆台部分的体积为 $52\pi\text{cm}^3$ ，且水瓶灌满水后盖上瓶塞时水溢出 $\frac{10\pi}{3}\text{cm}^3$ 。

记盖上瓶塞后，水瓶的最大盛水量为 V ，

(1) 求 V ；

(2) 该同学发现：该品牌暖水瓶盛不同体积的热水时，保温效果不同。为了研究保温效果最好时暖水瓶的盛水体积，做以下实验：把盛有最大盛水量 V 的水的暖水瓶倒出不同体积的水，并记录水瓶内不同体积水在不同时刻的水温，发现水温 y (单位： $^\circ\text{C}$) 与时刻 t 满足线性回归方程 $y = ct + d$ ，通过计算得到下表：



倒出体积 $x\text{cm}^3$	0	30	60	90	120
拟合结果	$y = c_1t + d$	$y = c_2t + d$	$y = c_3t + d$	$y = c_4t + d$	$y = c_5t + d$
倒出体积 $x\text{cm}^3$	150	180	210	...	450
拟合结果	$y = c_6t + d$	$y = c_7t + d$	$y = c_8t + d$...	$y = c_{16}t + d$

注：表中倒出体积 x (单位： cm^3) 是指从最大盛水量中倒出的那部分水的体积。其中：

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
- 1.4	- 1.3	- 1.2	- 1	- 1.1	- 0.9	- 0.8

令 $w = |c|$ ， $w_i = |c_i|$ ， $x_i = 30(i - 1)$ ， $i = 1, 2, \dots, 16$ 。对于数据 (x_i, w_i) ($i = 1, 2, \dots, 7$)，可求得回归直线为 L_1 ： $w = \beta x + \alpha$ ，对于数据 (x_i, w_i) ($i = 8, 9, \dots, 16$)，可求得回归直线为 L_2 ： $w = 0.0009x + 0.7$ 。

- (i) 指出 $|c|$ 的实际意义，并求出回归直线 L_1 的方程(参考数据： $\frac{9}{2800} \approx 0.0032$)；
- (ii) 若 L_1 与 L_2 的交点横坐标即为最佳倒出体积，请问保温瓶约盛多少体积水时(盛水体积保留整数，且 π 取 3.14) 保温效果最佳？

附：对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ ，其回归直线 $v = \beta u + \alpha$ 中的斜率和

$$\text{截距的最小二乘估计分别为 } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \cdot \bar{u}.$$

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x$ ， $g(x) = x + a \ln x$ 。

- (1) 讨论 $g(x)$ 的单调性；
- (2) 若 $a = 1$ ，直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都相切，切点分别为 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，求证： $x_2 > \frac{1}{e^2 - 1}$ 。

(二) 选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 两题中任选一题作答．如果多做，则按所做第一个题目计分．

22. [选修 4 - 4：坐标系与参数方程](10 分)

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2}{\cos\theta}, \\ y = \tan\theta, \end{cases}$ (θ 为参数)，直线 l 过点 $P(1, 2)$ 且倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的参数方程；

(2) 设 l 与 C 的两个交点为 A, B ，求 $|PA| + |PB|$.

23. [选修 4 - 5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = |x + 2| - |2x - 2|$ 的最大值为 m .

(1) 求 m 的值；

(2) 已知正实数 a, b 满足 $4a^2 + b^2 = 2\sqrt{ab}$. 是否存在 a, b ，使得 $\frac{2}{a} + \frac{4}{b} = m$.